TESIS

# BASES PARA UN PLANTEAMIENTO JERARQUICO DE LA LOGICA APLICABLE A LA REPRESENTACION E INTERPRETACION DEL CONOCIMIENTO

por

Mariano Hermida de La Rica
Ingeniero Superior de Telecomunicación
por la
E.T.S.I. Telecomunicación de Madrid

presentada en la
FACULTAD DE INFORMATICA
de la
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR EN INFORMATICA



Madrid, Marzo de 1986

TESIS

# BASES PARA UN PLANTEAMIENTO JERARQUICO DE LA LOGICA APLICABLE A LA REPRESENTACION E INTERPRETACION DEL CONOCIMIENTO

por

Mariano Hermida de La Rica
Ingeniero Superior de Telecomunicación
por la
E.T.S.I. Telecomunicación de Madrid

presentada en la
FACULTAD DE INFORMATICA
de la
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR EN INFORMATICA

Madrid, Marzo de 1986

A mis padres,

INDICE

## Introducción

### 1. Generalidades

Uno de los campos de investigación más activos hoy en dia dentro del terreno de la inteligencia artificial (I.A.) es el de la representación del conocimiento. Actualmente es usual el clasificar los esquemas de representación del conocimiento en tres grandes grupos [Mylos 82]: Lógicos, de redes semánticas y procedimentales. Ponemos en primer lugar las representaciones lógicas porque es precisamente dentro de ellas donde el presente trabajo se puede encuadrar.

Es bien conocida la controversia que ha habido en cuanto a cual ha de ser el papel que ha de jugar la lógica en los sistemas de I.A. Esta controversia surgió motivada por el fracaso de los métodos de demostración uniformes (resolución, paramodulación, etc.) que fueron desarrollados a finales de la década de los sesenta y principios de los setenta, propulsados por el trabajo de Robinson [Rob 65].

La razón de dicho fracaso se halla naturalmente en la explosión combinatoria. Newell sintetiza muy bien la posición mederadamente en contra de la lógica existente en ciertos círculos: "La lógica es el instrumento adecuado para analizar el nivel del conocimiento, pero no es frecuentemente la representación preferida para usarla en un determinado dominio" [New 82;pp. 121].

En contra de esta opinión se puede citar a Moore [Moore 82], para el cual el fracaso de los experimentos realizados a finales de los sesenta lo único que indica es que se necesita un mejor control del proceso de deducción, combinado con una mayor atención a las propiedades computacionales de los axiomas utilizados. Llegando a decir que en su opinión Newell ha malinterpretado seriamente la lección de los años sesenta.

En la misma linea se sitúa Hayes [Hayes 77] y Bundy [Bun 83]. En concreto Bundy ni se plantea el abandono de la lógica como método de representación del conocimiento; pues su interés se centra en modelizar el pensamiento matemático y si bién no todo el mundo esta de acuerdo con la tesis logicista de Russell (La matemática es reducible a la lógica) desde luego que la matemática sin la lógica no es nada. Bundy coincide con Moore en que el problema estriba en controlar el desarrollo del proceso deductivo. Concretamente se declara partidario de investigar axiomatizaciones meta-teóricas. Siendo uno de los principales motivos para ello el hecho de que la mayor parte del razonamiento matemático realizado por personas es de caracter meta-teórico y que las personas somos capaces de obtener resultados nada triviales que dificilmente están hoy en día al alcance de los ordenadores.

Kowalski y Bowen [Bow 82] argumentan asimismo que los sistemas de programación lógica actualmente existentes sufren de ciertas insuficiencias que podrían ser superadas incluyendo la parte del metalenguaje que trata sobre la demostrabilidad en el lenguaje. Una de las más importantes aplicaciones sería la capacidad del meta-lenguaje para comprimir muchas demostraciones del lenguje objeto en una única demostración. De hecho es posible el caso en el que el lenguaje objeto y el meta-lenguaje sean el mismo, lo que permite la formulación de expresiones que mezclan ambos lenguajes; los autores consideran la formalización de la regla:

"Una persona es inocente en tanto en cuanto no se demuestre que es culpable".

Su formalización como:

Inocente(x) ← Persona(x), ¬ Culpable(x).

No logra capturar el significado de la frase, pués una persona puede ser culpable pero no demostrablemente culpable y por lo tanto ante la ley es inocente. Sin embargo su formalización como:

Inocente(x) ← Persona(x), ¬ Demo(hechos, "Culpable(x)"), Relevantes(hechos).

Logra capturar la idea de que una persona es inocente si no es demostrable a partir de los hechos relevantes que es culpable.

Como claramente se puede deducir del título de este trabajo es dentro de la corriente de opinión sostenida por (entre otros) estos autores donde nos situamos. Ahora bien, el que se escoja el campo de la lógica como método de representación del conocimiento no necesariamente significa que se haya uno decidido por una lógica particular. Es generalmente admitida la tesis de Hilbert de que cualquier cosa, que pueda ser demostrada, se puede demostrar dentro de la lógica clásica de predicados de primer orden. Se puede enfatizar aun más esta tesis afirmando que cualquier cosa que pueda ser dicha se puede deducir dentro de un lenguaje clásico de primer orden. Pero no se pueden admitir estas afirmaciones sin matizarlas. Como señalan Israel y Brachman [Israel 82] en cuanto a la segunda afirmación hay que añadir que nadie ha intentado traducir de forma sistemática ninguna parte significativa del lenguaje clásico de primer orden; sino que las traducciones al lenguaje formal se quedan al nivel de ejemplos intuitivos de los textos introductorios de lógica.

Y en cuanto a la tesis de Hilbert, si bién quizás cualquier razonamiento llevado a cabo en otro sistema lógico sea traducible a la lógica clásica, hay que tener en cuenta que probablemente la herramienta de uso más general no será seguramente la mejor para cada aplicación.

Así pues, podemos sentirnos en libertad para separarnos de los lenguajes y lógicas clásicas en la medida en que lo necesitemos. Esto no es algo nuevo, pues han sido precisamente los problemas asociados a la I.A. los que en varias ocasiones han sugerido un cambio de lógica.

Un caso arquetipico podrían ser las lógicas no monotónicas que actualmente se estan desarrollando (ver por ejemplo [Mc Carthy 80], [Bossu 85]). De hecho se ha dicho más de una vez que la lógica clásica no se adecua al razonamiento de sentido común humano ([Wino 80]).

Pero volviendo a la linea de investigación meta-teórica (la preconizada por Bundy), esta ha dado lugar a desarrollos muy interesantes: Davis ([Dav 80 a] y [Dav 80 b]) ha mostrado como se puede utilizar la meta-teoría para atacar el fenómeno que él denomina saturación. Es decir la situación en la cual en un sistema experto hay tantas reglas potencialmente útiles que no es realista el invocarlas exhaustivamente sin ninguna guía. Davis utiliza meta-reglas que actuan durante el proceso de invocación de las reglas, bién eliminando algunas posibles candidatas o al menos estableciendo un orden de prioridad entre ellas.

Doyle [Doy 80] abunda en la misma linea, pues su programa SEAN, utiliza sus propias capacidades de razonamiento para decidir que inferencias realizar, además almacena las razones por las cuales sostiene un determinado juicio; de hecho contiene como subsistema al programa RMS que es una ampliación del TMS (Truth maintenance system: ver [Doy 79]). En cierto sentido el trabajo de Doyle quizás sea más especulativo, pues pretende simular ciertas capacidades humanas como por ejemplo la consciencia (self-conciousness) en base al conocimiento que el programa posee de si mismo.

Un trabajo relacionado con el de Doyle es el de Weyhrauch con su programa FOL [Weyh 80]. FOL esta basado en la utilización de pares LS (Lenguaje-estructura de simulación). Siendo las estructuras de simulación el análogo computable de la noción matemática de modelo; el programa de hecho puede manejar varias parejas LS simultaneamente. En particular Weyhrauch introduce una pareja LS especial denominada META, cuyo objetivo es constituir una teoría de las parejas LS. Naturalmente META es también una pareja LS e introduciendo un nombre ("Meta") en su lenguaje para designarla se puede asignar a "Meta" la propia pareja LS META; es decir META puede estudiarse a si misma. Además si META posee un nombre para todas las parejas LS de FOL, entonces la estructura de simulación es el propio programa FOL. (De hecho Doyle utiliza las ideas de FOL en su propio programa SEAN).

Como un ejemplo mas en la linea de utilización de la meta-teoría dentro de los sistemas de I.A. también podemos citar el trabajo de H.J. Levesque [Lev 82] y [Lev 84], el cual desarrolla toda una lógica auto-epistémica para el tratamiento de bases de datos incompletas, gracias a la cual es posible referirse no solo al dominio sino también a lo que la base de datos conoce acerca de dicho dominio. Es decir la base de datos puede contestar preguntas respecto a su propio estado de conocimiento. (En particular es fácil discernir entre si hay un elemento en el dominio que cumpla una determinada condición y si la base de datos lo conoce. Normalmente estas dos condiciones se suelen entremezclar, pues es usual toman como respuesta negativa el fallo en encontrar el elemento en cuestion).

Sin embargo, a pesar de estos ejemplos de aplicaciones meta-teóricas, la meta-teoría presenta bastantes problemas: Son bien conocidos los principales resultados meta-teóricos de la lógica clásica (Toeremas de Tarski y Gödel) que son resultados limitativos y han sido a veces utilizados para negar la propia posibilidad de sistemas de I.A. con un grado de inteligencia similar al humano (vease [Cherniavsky 80] y [Cotogno 81] como ejemplos relativamente recientes en este sentido).

El caso de FOL ilustra muy bien las dificultades con las que se puede uno tropezar: Dado que la estructura de simulación de META es el propio programa FOL, al aplicar una regla de inferencia cualquiera se cambia el conjunto de hechos conocidos, con lo que cambia el conocimiento que el programa posee y por lo tanto la propia estructura de simulación, es decir el modelo. Esto no es algo que ocurra en los lógicas clásicas: el modelo es independiente de la teoría acerca de él. Y da lugar a que proporcione respuestas distintas si por ejemplo se le pregunta dos veces seguidas cual es la demostración más larga conocida.

Este tipo de comportamiento ha hecho que algunos autores [Mc Derm 80] hayan solicitado que se realize una comparación entre el sistema FOL y las lógicas no monotónicas, pues FOL presenta precisamente el rasgo que caracteriza a las lógicas no monotónicas: la invalidación en algún momento de antiguos resultados. (De hecho ha habido autores [Moore 85] que también han afirmado que las lógicas de Mc Dermott deberían de calificarse de auto-epistémicas más que de no monotónicas en general; por lo que no es extraño que Mc Dermott relacione al programa FOL con sus lógicas).

Es decir, como ejemplifica el caso de FOL el principal problema es la posibilidad de paradojas al tratar con sistemas en los cuales se quiere hacer explícita su propia meta-teoría.

De hecho es bordeando la paradoja como se obtiene el primer teorema de incompletitud de Gödel: Codificando la expresión "Lo que digo no es teorema" en lugar de directamente la paradoja del mentiroso: "Lo que digo no es verdad" (sea esto dicho en términos intuitivos). Mientras que el teorema de Tarski de la indefinibilidad de la verdad es directamente la aplicación de la paradoja del mentiroso: Si hubiese una expresión T [y] tal que para toda fbf A T[" A "] se verificará si A es verdadera (" A " es el código de A), entonces aplicando el lema diagonal a la expresión $\neg$ T(y) (ver por ejemplo [Boolos 74] p. 176 habría una expresión G cerrada tal que:

$$\vdash_{N} G \leftrightarrow \neg T[\text{" } G \text{ "}]$$

y como los teoremas son verdaderos (en la interpretación usual) G sería verdadera si T [" G "] no lo es; lo que contradice el supuesto inicial. Pero G sería precisamente la expresión que diría de si mismo que no es verdadera.

Sin embargo, a pesar del teorema de Tarski acerca de la indefinibilidad de la verdad, es preciso poder hablar (aunque sea en un sentido limitado) de la verdad de las expresiones (de las formulas bien formadas: preferimos el vocablo "expresiones"). La razón de ello es que como señala Perlis [Per 85], cualquier sistema que esté interactuando con un entorno complejo puede encontrarse en la situación de que aun no sabiendo si determinados juicios son ciertos desea considerarlos como tales por ser altamente plausibles; si posteriormente se muestran equivocados, será importante señalarles como tales y ademas puede ser interesante el registrar el hecho de que se ha cometido un error y de las razones por las cuales algo que se creía cierto no lo es.

Este trabajo va a estar muy orientado a estudiar predicados de expresiones, la importancia de este tipo de predicados radica en que se pueden considerar como tales , conceptos tipicamente intensionales como "creer", "pensar", etc; el primer predicado que vamos a tratar va a ser precisamente el correspondiente al concepto de verdad. Hay cierta inclinación a pensar que el predicado de verdadero es redundante. Si algo es verdadero basta con afirmarlo y si no lo es basta con negarlo; con lo que podríamos olvidarnos tranquilamente de él. Sin embargo piensese por ejemplo en la frase: "No todas las afirmaciones de los libros de historia son ciertas". Si se quiere eliminar las palabras "son ciertas" en la formalización, basta con coger la conjunción de todas las afirmaciones presentes en los libros de historia y negarla; pero hay que reconocer que la idea no es muy práctica (aun más entretenido podría ser formalizar sin un predicado de verdadero la frase: "No todo el mundo dice siempre lo que es verdad").

Es decir es importante el poderse referir a los juicios como verdaderos o falsos; sin embargo el predicado "verdadero" es un predicado difícil de manejar, pues da lugar al problema de las paradojas (basicamente la paradoja del mentiroso. Y dado que es uno de los primeros problemas con los que nos vamos a tener que enfrentar al intentar representar el conocimiento que un sistema posee de si mismo, vamos a dedicar algún tiempo a comentar parte de las tentativas para resolver la paradoja del mentiroso y otras relacionadas. Si bién ello no constituye el único interés del presente trabajo, si es cierto que ha consumido mucho esfuerzo.

## 2. Trabajos precedentes más directamente relacionados

Feferman [Fefer 84] señala que las soluciones a las paradojas se pueden clasificar en tres grandes grupos según modifiquen los siguientes aspectos:

1º - Lenguaje
2º - Lógica
3º - Principios fundamentales.

Dentro del primer grupo se podrían incluir la solución "ortodoxa" de Tarski basada en la jerarquia de lenguajes, así como la solución de Russell a las paradojas de la lógica de Frege. De hecho ellos mismos eran conscientes de la analogía entre sus soluciones y han sido comparados más de una vez. (Vease por ejemplo [Church 84]).

Dentro del segundo grupo, la tentativa más popular es la de las lógicas no bivalentes, la idea fundamental es declarar a las frases paradójicas ("lo que digo no es verdad") ni verdaderas, ni falsas; ya que al asignarlas uno de estos valores de verdad se puede seguir facilmente una contradicción. Dentro de esta linea los trabajos que más atención han recibido han sido los de B.C. Van Fraassen ([Fraas 69], [Fraas 70]) y de Kripke [Krip 75].

Van Fraassen ha desarrollado (y aplicado) el método de las super-evaluaciones; inicialmente el método surgió motivado por la lògica libre ("free logic") [Fraas 66a, 66b y 68b]. Es decir para sistemas lógicos en los cuales se admite que haya constantes (o en general términos) que no denoten, el modelo (parcial) no tiene por qué contener una interpretación de cada constante individual. En dicho caso, si por ejemplo c es una tal constante y F es una letra de predicado, no se puede decir ni que F(c) sea verdadero ni que sea falso. (El estudio de estas lógicas ha sido posteriormente proseguido por [Wood 84] y [Benci 83] principalmente).

En su artículo [Fraas 68], Van Fraassen introduce las ideas más importantes para el análisis de las paradojas; concretamente introduce los siguientes conceptos:

a) Presuposición: Una proposición A presupone otra B si A es verdadera o falsa solo en el caso de que B sea verdadera; por ejemplo: "el actual rey de Francia es calvo" presupone que "existe un rey en Francia", pues la primera no puede ser ni verdadera ni falsa si no se da la segunda.

Naturalmente la presuposición carece de sentido en un lenguaje bivalente, pues al ser todas las proposiciones verdaderas o falsas, es una relación que todas las proposiciones mantienen unicamente con las tautológicas.

b) Necesidad: Una proposición A necesita de una B si cuandoquiera que A es verdadera B es verdadera.

El mismo ejemplo anterior nos sirve si "el actual rey de Francia es calvo" es verdadera entonces necesariamente es verdadera "existe un rey en Francia". Pero también "no es el caso que el actual rey de Francia sea calvo" necesita de "existe un rey de Francia". De hecho A presupone B, se puede caracterizar como:

I) A necesita B
II) no A necesita B.

La noción de necesidad se toma de hecho como primaria y se supone que la semántica del lenguaje especifica la relación $\bar{N}$ de necesidad entre proposiciones.

La tercera idea fundamental es la de un conjunto saturado de proposiciones. Para definirlo primero hay que extender (o mejor dicho concretar) el significado de evaluación clasica: es decir una asignación de valores v y f a las proposiciones con independencia de cuales sean las relaciones de necesidad entre ellas. Entonces un conjunto saturado intenta ser la especificación de una posible situación: pretende ser el conjunto de proposiciones verdaderas en una posible situación. Por lo tanto:

- Ha de ser satisfecho por al menos una evaluación clásica (es decir, al menos una evaluación clásica debe satisfacer todas las proposiciones del conjunto).

- Si A necesita B y A esta en dicho conjunto B también ha de estarlo. (B ha de ser verdadera para que A lo sea).

- Si todas las evaluaciones clásicas que satisfacen G satisfacen A, entonces A también ha de estar en G. (Pues en el posible estado de cosas representado por G, A es verdadera).

Entonces la super-evaluación inducida por G es la función S tal que:

- Si todas las evaluaciones que satisfacen G satisfacen A entonces S(A) = v.

- Si todas las evaluaciones que satisfacen G asignan f a A entonces S(A) = f.

- Indefinida en cualquier otro caso.

Ello define la semántica de los lenguajes presuposicionales. El último paso que Van Fraassen da es analizar el significado de ser verdadero como co-necesidad:

T(A) ssi A (según Tarski).

Significa (según Van Fraassen) que T(A) necesita A y A necesita T(A).

Entonces las paradojas se producen dando las presuposiciones adecuadas: Si x necesita de $T(\neg x)$ y $\neg x$ necesita de T(x) tenemos la caracteristica típica de la paradoja del mentiroso: para ser x verdadera ha de serlo $\neg x$ pero para ser asimismo $\neg x$ verdadera ha de serlo x; lo cual en las lógicas bivalentes significa $x \leftrightarrow \neg x$ que es una contradicción. Pero si x necesita de $T(\neg x)$, como asimismo $\neg x$ necesita de $T(\neg x)$; x presupone $T(\neg x)$; la solución es claramente que $T(\neg x)$ no es verdadera, con lo que x tiene una presuposición que falla, por lo tanto no puede ser ni verdadera ni falsa y otro tanto ocurre con $\neg x$ (lo cual evidentemente concuerda con que $T(\neg x)$ no sea verdadera).

En su artículo [Fraas 70], Van Fraassen extiende estas nociones a lenguajes de cálculo de predicados de la forma que cabe esperar. El mayor problema con el que se enfrenta Van Fraassen es que si bien en el ejemplo anterior se puede llegar a las conclusiones $\neg T(x)$ y $\neg T(\neg x)$, se pueden construir paradojas reforzadas en las cuales la no verdad de la paradoja no se puede expresar dentro del sistema.

De hecho este es un problema general de todos los intentos basados en lógicas con huecos en el valor de verdad y que volveremos a ver un poco más detenidamente tras ver el enfoque de Kripke.

Kripke en un famoso artículo [Krip 75] desarrolla una teoría de la verdad basada en la noción de fundamentación ("grounding") que fue inicialmente introducida por Herzberger [Herz 70] y ha sido recogida tambien (independientemente) por

Martin y Woodruff [Martin 84b] con técnicas similares a las de Kripke, si bien el estudio de este último es mas completo.

La idea es la siguiente: del mismo modo que hay expresiones como "La nieve es blanca" (1) tales que para determinar su valor de verdad no es necesario conocer antes la verdad de otras expresiones; existen otras expresiones cuyo valor de verdad se puede calcular conociendo primero el de algunas otras: "La expresion: "La nieve es blanca" es verdadera" (2), necesita primero de la asignación de verdad a "La nieve es blanca", tanto (1) como (2) serían casos de expresiones fundamentadas, bien fijándose en la realidad, o en el valor de verdad ya asignado a otras expresiones uno puede determinar el valor de verdad de las mismas.

Sin embargo expresiones como: "esta expresión es cierta" (3) y "esta expresión no es cierta" (4) serían no fundamentales; pues partiendo de expresiones que hacen referencia a la realidad, expresiones que se refieren a la verdad de otras que hacen referencia a la realidad, etc.; no se llega nunca a asignarlas un valor de verdad a (3) y (4). (Además esta última no sólo será no-fundamentada sino paradójica).

Kripke supone que se parte de un lenguaje con una letra de predicado T, que va a hacer las funciones de predicado de verdad; además supone que hay dada una interpretación parcial del lenguaje: Una interpretación normal, salvo que la interpretación de T está dada por una extensión $S_1$ (de expresiones inicialmente, "a priori", verdaderas) y una anti-extensión $S_2$ (de expresiones inicialmente falsas), tales que no necesariamente $S_1 \cup S_2 = S$ (S: Conjunto de todas las expresiones).

Entonces partiendo de esta interpretación parcial, utilizando algún método para tratar las conectivas en caso de que un predicado no esté definido es posible determinar unos nuevos conjuntos $S'_1$ y $S'_2$ de expresiones verdaderas y falsas (concretamente Kripke utiliza el esquema de Kleene [Kleene 52] de conectivas fuertes]. Así pues conseguimos unas nuevas extensión y antiextensión $(S'_1, S'_2) = \Gamma(S_1, S_2)$; que pueden servir como nueva interpretación parcial del predicado T. La cuestión interesante es saber si existen puntos fijos del operador $\Gamma$, es decir $S_1$ y $S_2$ tales que $(S_1,S_2) = \Gamma(S_1,S_2)$; pues en tal caso el predicado T declara como verdaderas aquellas y solo aquellas expresiones que al evaluarlas resultan ser verdaderas, es decir es el predicado de verdadero de su propio lenguaje.

Kripke demuestra que efectivamente existen tales puntos fijos construyendo un punto fijo mínimo $\sigma$ a partir de la interpretación vacía para T (es decir teniendo $(\phi,\phi)$ como extensión y anti-extensión respectivamente) por medio de inducción transfinita.

El punto fijo $\sigma$ es mínimo en el sentido de que cualquier otro punto fijo es una extensión del mismo: $S_{1\sigma} \subset S_{1a}$ y $S_{2\sigma} \subset S_{2a}$ si a es un punto fijo de $\Gamma$.

Las afirmaciones fundamentadas se pueden definir entonces como aquellas que resultan ser verdaderas en este punto fijo (tras un determinado número de pasos resultan estar unidas a la "realidad"), mientras que las paradójicas son aquellas que no son ni verdaderas ni falsas en ningun punto fijo (es imposible asignarlas un valor de verdad). Naturalmente hay afirmaciones como el ejemplo (3), que no son paradójicas ni fundamentadas y hay puntos fijos que las declaran verdaderas y otras que las declaran como falsas.

Ya se ha señalado que el punto débil de estas teorías con "huecos en el valor de verdad" es la presencia de paradojas reforzadas.

Intuitivamente esto corresponde a que si declaramos ni verdadera ni falsa la expresión : "esta expresión no es verdadera", para librarnos de la paradoja entonces poco conseguimos, pues caemos de la sarten al fuego: "esta expresión es o falsa, o ni verdadera ni falsa" nos replantea la paradoja: Si la deseamos declarar ni verdadera ni falsa entonces resulta ser verdadera, si la declaramos falsa entonces resulta verdadera y si se la declara verdadera resulta falsa (ver [Burge 79] y [Haack 82]) pp. 171.

Tanto Kripke como Van Fraassen reconocen este problema, pues señalar que hay hechos acerca de la verdad de las expresiones que no se pueden capturar en el lenguaje; por ejemplo el hecho de que una expresión sea paradójica no es expresable dentro del lenguaje sino que es necesario ascender a un meta-lenguaje, con lo cual "el fantasma de la jerarquía tarskiana esta aún con nosotros" (según palabras de Kripke).

En cualquier caso, esta no es la única crítica que se le ha realizado a Kripke. Gupta [Gupta 84] pone el ejemplo de la expresión:

$$\Lambda x \neg \{T(x) \ \& \ \neg T(x)\}$$

que indica que ninguna expresión puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa (por lo que intuitivamente es verdadera).

Sin embargo no es declarada como tal en el punto fijo mínimo de Kripke (sino indefinida) y por lo tanto es una expresión no fundamentada. La razón de este resultado estriba en que una expresión del tipo $\Lambda x \ A(x)$ sólo puede ser decidida bien cuando se encuentra un contra-ejemplo, cosa que no ocurre en el caso que nos ocupa, o bien cuando se decide que $A(x)$ es verdadera para cualquier valor de x. Ahora bien en nuestro caso no es posible llegar a hacer esto, pues uno de los valores de x que hay que comprobar es precisamente

$\Lambda x \neg (T(x) \ \& \ \neg T(x))$ antes de poder decir que es verdadera. Tenemos de nuevo una pescadilla que se muerde la cola.

Así pues, en general las lógicas no bivalentes tampoco han sido muy afortunadas, antes de abandonarlas quisiéramos citar por último a Skyrms, [Skyrms 70] que señala que nos podemos librar de la paradoja del mentiroso si consideramos el tercer valor no como "indefinido" sino como "sin sentido" entonces considerando la paradoja del mentiroso reforzado: "Lo que digo es o falso o sin sentido", nos bloquea el camino para llegar a decir que es verdadera; pues si realmente es sin sentido, no dice nada, ni siquiera llega a decir que carezca de sentido. Por desgracia ello le lleva a rechazar la ley de la substitutividad de los iguales; cosa que es bastante poco intuitiva.

El tercer grupo en el que Feferman clasifica las propuestas (alteración de principios básicos) es un cajón de sastre en el que caben todos los demás intentos (y en el cual naturalmente nos incluimos nosotros mismos).

Dentro de este grupo se pueden incluir como más sobresalientes los trabajos de Herzberger [Herz 84] y Perlis [Per 85]. Ambos parten del trabajo de Kripke y ambos son modificaciones bivalentes de dicha teoría.

Herzberger utiliza las ideas de Kripke para desarrollar un estudio del comportamiento de las paradojas dentro de una lógica bivalente. No rechaza realmente las paradojas, sino que define una jerarquía de interpretaciones siguiendo una tecnica similar a la de Kripke, dentro de la cual las paradojas son aquellas expresiones que no llegan a alcanzar un valor de verdad estable. Por ejemplo, la paradoja del mentiroso tiene una inestabilidad de período dos: Si inicialmente clasificamos como verdadera a "esta afirmación es falsa", seguidamente hay que clasificarla como falsa y a continuación de nuevo como verdadera, etc.

Herzberger demuestra que hay perioricidades de cualquier valor finito e incluso transfinito. Es mas, afirma que es posible demostrar que todos los elementos (todas las expresiones) son periódicas en casi todas partes. Es decir que para cada elemento Z existen ordinales K(Z) y f(Z), tales que al valor asignado a Z es periódico de período f(Z), a partir del ordinal K(Z). Naturalmente si el período es 1 la expresión se estabiliza. (Herzberger no llega a dar en este artículo la definición exacta de periodicidad para ordinales transfinitos, sino que se remite a notas suyas todavía no publicadas).

Si algo se le puede objetar a esta teoría es que es más una aceptación (como antes hemos dicho) de las paradojas y un estudio de ellas, que una eliminación o explicación de las mismas. Por otra parte, aunque su artículo se titule "Notas sobre semántica ingenua", no se puede decir que sea excesivamente ingenua o intuitiva la semántica que proporciona para el predicado verdadero. Concretamente no es la idea de tener que trabajar con cualquiera ordinales transfinitos, la más agradable para pensar en implementarla en un programa.

Perlis [Per 85] da un paso en tal dirección. Este autor modifica un tanto el concepto de verdadero, en el sentido de que el afirmar que algo es verdadero significa para él verdadero y fundamentado. En particular $\neg T(x)$ no afirma que x sea falsa, sino tan sólo que no está fundamentada.

Al igual que para Kripke, para Perlis no es necesariamente cierto T("A") v T("$\neg$A"), aunque si es cierto A v $\neg$A (utiliza una lógica clásica bivalente).

Para capturar el significado del predicado T dentro del sistema formal, Perlis introduce los bicondicionales:

$$T("A") \leftrightarrow A^*$$

en lugar del autentico bicondicional de Tarski:

$$T("A") \leftrightarrow A$$

El operador * reemplaza cada ocurrencia de $\neg T("....")$ por $T("\neg(.....)")$. Si la expresión considerada carece de apariciones de T negadas, los bicondicionales de Perlis se reducen directamente a los de Tarski.

La idea de estos bicondicionales es reducir las expresiones en las cuáles aparece el predicado T a otras en las que no aparece. Ello no siempre es posible, si lo es y T desaparece tenemos un caso de expresión fundamentada.

La principal objeción que se le puede hacer a la teoría de Perlis es que para ciertas expresiones L (del tipo de la paradoja del mentiroso) se pueden demostrar tanto L como $\neg T(L)$.

Es decir, se demuestra una expresión y paralelamente que ella misma no es verdadera (según el sentido que Perlis atribuye a este predicado); con lo cual la relación entre ser teorema y ser verdadera es realmente muy peculiar (pero por lo menos es una lógica bivalente).

Con ello dejamos ya el tercer y último grupo. Realmente el único que no hemos apenas citado es el primero, pero es que las soluciones "ortodoxas" son muy conocidas, así como las críticas a las mismas: el lenguaje natural no parece estar estructurado en diferentes niveles.

Como ya dijimos no es nuestro único interés el tema de las paradojas, sino que queremos desarrollar ciertas ideas avanzadas por McCarthy. Ya en su artículo de 1969 [McCar 69] McCarthy se muestra preocupado por el problema de la opacidad referencial. Un ejemplo clásico de lo que esto significa es el (erróneo) razonamiento siguiente:

- Jorge IV pensaba si Walter Scott sería el autor de las novelas de Waverley.

- Walter Scott es el autor de las novelas de Waverley.

Luego:

- Jorge IV pensaba si Walter Scott sería Walter Scott.

En sus artículos [McCar 77] y [McCar 79], intenta introducir como objetos en el mismo dominio tanto los conceptos individuales como los objetos propiamente dichos a los que los conceptos hacen referencia. Ello tiene sus ventajas: "Walter Scott" y "el autor de las novelas de Waverley" pueden ser la misma persona, pero significan cosas distintas para alguien (ser conceptos distintos). McCarthy sin embargo se limita a tratar con conceptos individuales como pudieran ser "Pegaso" o "el teléfono de Miguel" en lugar de conceptos genéricos como "unicornio" o "teléfono". Por otra parte no llega a desarrollar una axiomática, sino simplemente da una serie de ejemplos para señalar las ventajas de semejantes intentos: principalmente la capacidad para trabajar con contextos oblicuos y la posibilidad de tratar con expresiones como saber, pensar, creer, desear, etc., sin tener que recurrir a una lógica modal, sino simplemente dentro de un lenguaje clásico no modal. De hecho no ha sido el único que ha elaborado propuestas en este sentido; por ejemplo Bealer ([Beal 79] y [Beal 84]) ha desarrollado una teoría de propiedades, relaciones y proposiciones, en la cual estas se toman como objetos irreducibles, muy a la manera de McCarthy: como objetos del dominio.

Nuestro trabajo se inspira en estas ideas de McCarthy, pero no sólo en él, sino que también tenemos cierta deuda con Wittgenstein. Para Wittgenstein: "el significado de una palabra es su uso en el lenguaje" [Wit 52. p. 20 e]. Esta tesis ha sido ciertamente criticada (vease por ejemplo [Wavell 83]) y no es por tanto aceptada por todo el mundo; sin embargo se le puede dar una interpretación estructuralista a la misma que nos resulta muy atrayente, interpretando "uso" por el conjunto de relaciones que el hablante establece entre las propias palabras del lenguaje. Si el significado de las palabras esta dado por su "uso" esto significa que la semántica ha de venir dada por una especificación de las relaciones entre las distintas palabras, es decir que el dominio de interpretación ha de contener necesariamente objetos lingüísticos y (si seguimos fielmente a Wittgenstein) sólo objetos lingüísticos (y ciertamente las relaciones entre palabras no son meramente sintácticas, pues la sintaxis de un lenguaje es única y las interpretaciones pueden ser muchas).

## 3. Objetivos

Concretamente nos proponemos:

- Definir unos lenguajes que sean adecuados para poder especificar su semántica en términos unicamente de entidades lingüísticas. De hecho el problema es más especificar la semántica que diseñar el lenguaje, pues en especial queremos poder tratar con el predicado de verdad para el lenguaje. La aproximación a dicho problema va a consistir en una estructura jerárquica, con niveles implícitos, de forma que tengamos un único predicado de verdad para todo el lenguaje, si bien la solución se asemeja a la de Tarski. Desde luego trataremos de estudiar cómo se comportan estos sistemas respecto a las paradojas.

- Realizar un estudio de las lógicas adecuadas a este tipo de sistemas; es decir definir una axiomática y unas reglas de inferencia, así como ver las propiedades de la lógica así definida. Idealmente desearíamos que fuese lo más similar a la lógica clásica; sin embargo el predicado "verdadero" plantea sus problemas y aunque es posible obtener resultados bastante intuitivos (en particular que demostrar que una expresión dada es verdadera es lo mismo que demostrar dicha expresión, contrariamente a lo que le sucede a Perlis [Per 85]); sin embargo no acaba de encajar en lo lógica clásica, lo cual es natural dado el teorema de Tarski.

- Por último intentaremos mostrar las posibles aplicaciones de estas ideas a la modelización de problemas, concretamente como se relacionan nuestras ideas con los problemas planteados por

McCarthy o como se podrían utilizar en un entorno de demostración automática: al tener predicados sobre expresiones estamos en posición de representar facilmente conocimientos metateóricos y por lo tanto de utilizarlos.

## Desarrollos

### 1. Presentación de los sistemas

A continuación vamos a introducir unos lenguajes, y especialmente una semántica de los mismos, más adecuadas a nuestros fines. El desarrollo de la "teoría" tiene muchas reminiscencias clásicas; por lo que cualquier buen libro de lógica clásica (Mendelson 69, Kleene 67, Manin 71) puede servir como referencia adicional en cualquier momento.

Los lenguajes que vamos a presentar se caracterizan en primer lugar por ser "bisurtidos". Esta denominación la tomamos como particularización del caso más general de las lógicas multisurtidas (que han sido estudiadas entre otros por Wang 52, Fefer 68, Fefer 74). Sin embargo nosotros no estamos directamente interesados en tratar con el caso general; sino que tenemos un objetivo más preciso en mente: los dos tipos de variables (a los que denominaremos individuales y gramaticales) van a ser introducidas para tratar dos tipos de objetos en principio muy distintos. Por una parte las variables individuales tratarán lo que se podría llamar "el mundo externo", el mundo de los "individuos" sean estos números, mesas, sillas o cualquier otra cosa. Y por otra las variables gramaticales que se referirán van a tratar al conjunto de las expresiones (fbf's) del lenguaje.

De hecho esta es una visión simplificada de la semántica de estos lenguajes, pues no vamos a desear que las variables individuales varíen directamente sobre el conjunto de los individuos, sino sobre los nombres de dichos individuos. Es decir el dominio de interpretación será precisamente lingüístico aunque de hecho estará dividido en dos subdominios: el de nombres individuales y el de expresiones.

Una interpretación del lenguaje vendrá ahora dada por un conjunto de relaciones definidas sobre el dominio.

El significado intuitivo de esta forma de trabajar es que al ser el dominio puramente lingüístico (un conjunto de signos y de combinaciones de signos) contienen unicamente elementos que pueden estar dentro de un ordenador (o de la mente humana). Al sustituir los individuos, por sus nombres se puede decir, un tanto metaforicamente, que estamos "interiorizando" el mundo externo. Entonces un interpretación puede ser asimilada a un estado de conocimiento o a un estado mental (o mas concretamente a una red semántica). Ya que conocer el significado de un lenguaje es conocer como se relacionan unos términos con otros o como funciona cada término del lenguaje. Como diría Wittgenstein [Wit 52, p20e] "El significado de una palabra es su uso en el lenguaje", si bien no sabemos si él estaría de acuerdo con una interpretación tan "estructuralista" de sus palabras como es la nuestra.

En último extremo, lo que vamos a hacer de una manera mas formal es precisamente lo que se hace en las redes semánticas: intentar capturar el significado del lenguaje especificando las relaciones que hay entre los diferentes términos. Pero empecemos ya definiendo el lenguaje.

## 1.1 Sintaxis

Supondremos dado un conjunto de símbolos $\Sigma$ que no especificaremos, pero que contendrá todos los que consideremos necesarios, $\Sigma^*$ será el conjunto de todas las cadenas finitas de dichos símbolos (terminología de Hopcroft 79). El lenguaje que vamos a construir será un subconjunto de $\Sigma^*$ al que dotaremos de una cierta estructura. Concretamente precisaremos de los siguientes subconjuntos de $\Sigma^*$, que supondremos definidos para cada lenguaje:

1.a) Nombres individuales.
1.b) Variables individuales (x, y, z,....).
1.c) Funciones individuales ($f_n{}^{,m}$).
2.a) Variables gramaticales ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$,....).
2.b) Relaciones mixtas ($F_r{}^{p,q}$).
3.a) Símbolos lógicos y auxiliares ($\neg$, $\Lambda$, $\rightarrow$, ), (,...).

El convenio en cuanto a los índices de las funciones y individuales es que el super-índice indica el número de argumentos mientras que el subindice sirve para distinguir unas de otras. En cuanto a los índices de las relaciones mixtas, el subindice sirve asimismo para distinguir unas de otras ; mientras que el primer super-indice indica el número de argumentos individuales y el segundo el de argumentos gramaticales (si p=0, tenemos una relación puramente gramatical, entre expresiones). Digamos adémas que los simbolos "$\neg$" y "$\Lambda$" representaran la negación y la generalización en nuestro sistema formal.

Tenemos que definir cuales son las expresiones (fbf's) de nuestro lenguaje y para ello debemos de ir dando una serie de definiciones de término individual y fórmula atómica individual son las clásicas:

1.1.1 Definición de término individual:

a) Tanto las variables individuales como los nombres son términos individuales.

b) Si $t_1$,....,$t_m$ son términos individuales y $f_n{}^m$ es cualquier nombre de función entonces:

$f_n^m\ (t_1,\ldots.,t_m)$

es un término individual.

c) No hay más términos individuales que los generadores por las dos reglas anteriores.

Vamos a distinguir entre expresiones (fbf's) y términos gramaticáles, que son los argumentos posibles de un nombre de relación gramatical, naturalmente las expresiones serán términos pero en general no ocurrirá siempre a la inversaa. Sin embargo la definición es conjunta:

1.1.2 Definición de expresión y término gramatical.

a) Todas las variables gramaticales son términos gramaticales.

b) Si $F_r^{p,q}$ es cualquier nombre de relación mixta siendo $t_1$, $t_2,\ldots.,t_p$ términos individuales y $\tau_1$, $\tau_2,\ldots.,\tau_q$ términos gramaticales cualesquiera

$F_r^{p,q}\ (t_1,\ t_2,\ldots.,t_p;\ \tau_1,\ \tau_2,\ldots..,\tau_q)$

es una expresión del lenguaje (de hecho una expresión atómica).

c) Toda expresión es asimismo un término gramatical.

d) Si $\xi_1$ y $\xi_2$ [$\tau_1$ y $\tau_2$] son expresiones [términos gramaticales] y x y $\alpha$ son cualesquiera variables individual y gramatical entonces también son expresiones [términos gramaticales]:

$\neg\ (\xi_1)$ $\qquad\qquad$ $[\neg\ (\tau_1)]$

$\xi_1 \rightarrow \xi_2$ $\qquad\qquad$ $[(\tau_1 \rightarrow \tau_2)]$

$\Lambda x\ (\xi_1)$ $\qquad\qquad$ $[\Lambda x\ (\tau_1)]$

$\Lambda\alpha\ (\xi_1)$ $\qquad\qquad$ $[\Lambda\alpha\ (\tau_1)]$

e) No hay mas expresiones ni términos gramaticales que los generados por las cuatro reglas anteriores.

Como es usual en $\Lambda x\ (\xi_1)$ o en $\Lambda\alpha\ (\xi_1)$ $[\Lambda x\ (\tau_1)$ o $\Lambda\alpha\ (\tau_1)]$, llamaremos a $\xi_1$ $[\tau_1]$ el rango del cuantificador $\Lambda x$ o $\Lambda\alpha$ en su caso.

Observaremos que si bién no poseemos "nombres gramaticales" son las expresiones las que van a jugar ese papel; tampoco poseemos funciones gramaticales, la razón de ello es que al estudiar la semántica del predicado "verdadero" o bién habría que componer restricciones poco intuitivas o nos hallaríamos con bastantes problemas; así pues para simplificar hemos preferido prescindir de ellas. Sin embargo no hemos querido prescindir de la posibilidad de construir términos más complejos a partir de otros simples como son las variables y las expresiones. Así pues uno puede encontrarse con términos del estilo $\alpha \rightarrow \xi$ (o $\alpha \rightarrow F_r^{p,q}\ (t_1, t_2, \ldots, t_p;\ \tau_1,\ \tau_2, \ldots \tau_q)$) en los cuales se combinan variables y expresiones. El emplear esta posibilidad directamente en la sintaxis, esperamos que mejore (haga mas sencillos) los medios expresivos del mismo. Por ejemplo, se puede pensar en escribir:

$\Lambda\alpha\ \Lambda\beta$ Tauto $[\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)]$

$\Lambda\alpha\ \Lambda\beta\ \Lambda\Gamma$ Tauto $[(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\Gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\Gamma))]$

$\Lambda\alpha\ \Lambda\beta$ Tauto $[(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)]$

$\Lambda\alpha\ \Lambda\beta$ [Tauto $(\alpha)\rightarrow\{$Tauto $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow$ Tauto $(\beta)\}]$

Que es una axiomatización muy inmediata del concepto de "tautología proveniente del cálculo de proposiciones". Naturalmente se puede llevar a cabo por otros métodos, pero dificilmente tan sencillos como este.

Aun hemos de dar varias definiciones sintácticas adicionales tales como variable libre, variable ligada, etc. La razón de que nos tengamos que detener en estas definiciones radica en que al ser la sintáxis un poco más compleja hay más casos de apariciones de variables. Sin embargo para que la discusión de los posibles casos sea más clara, pospondremos las definiciones hasta introducir la semántica.

## 1.2 <u>Semántica</u>

Ya hemos dicho que el dominio de interpretación va a estar subdividido en dos: el conjunto de expresiones E y el conjunto de los nombres individuales N. Observese que el dominio de interpretación es fijo para cada lenguaje; ello corresponde al punto de vista que estamos siguiendo, es decir la única libertad que nos queda es la de definir el conjunto de relaciones sobre dicho dominio que será la interpretación de nuestros símbolos de relación (y función). Según el enfoque "estructuralista" que seguimos esa es toda la libertad que necesitamos para precisar el significado de nuestro lenguaje.

Un último punto antes de proceder a dar las definiciones formales. Deseamos tener dentro del lenguaje un predicado de verdad (V). Este es un predicado gramatical (una propiedad de las expresiones) pero no se puede definir de forma independiente sino que ha de ser definido "a posteriori" una vez que se conozcan las interpretaciones de los demás predicados. Por ello las definiciones que vamos a dar son las siguientes:

1.2.1 El dominio de interpretación es la unión de dos conjuntos: el de nombres individuales (N) y el de las expresiones (E). $D = N \cup E$.

1.2.2 Una interpretación es un conjunto de propiedades $F_r^{p,q}$ (definidas sobre $N^p \times E^q$ respectivamente) junto con un conjunto de funciones $\bar{f}_{n,m}$ ($N^m \to N$), que se hallan en correspondencia biunívoca con los nombres de relaciones individuales, mixtas y funciones del lenguaje, exceptuando al nombre de relación gramatical V.

La "interpretación" $\bar{V}$ de V será dada después. Naturalmente el siguiente paso es definir lo que es una valoración.

1.2.3 Definición de valoración:

Es cualquier función del conjunto de todos los términos (tanto individuales como gramaticales) en el dominio de interpretación, que verifica además los siguientes dos conjuntos de propiedades:

a.1: La valoración de un nombre individual es dicho nombre individual.

a.2: La valoración de una variable individual es un nombre individual.

a.3: Si $f_n^m$ es cualquier nombre de función, entonces:

$$v[f_n^m (t_1,..t_m)=\bar{f}_{n,m} [v(t_1),...,v(t_m)]$$

para cualesquiera términos individuales $t_1,..,t_m$.

b.1: La valoración de una expresión atómica es ella misma.

b.2: La valoración de una variable gramatical es una expresión del lenguaje.

b.3: Siendo $\tau_1$ y $\tau_2$ términos gramaticales cualesquiera y $x$ y $\alpha$ variables individual y gramatical arbitrarias se ha de cumplir:

$$v(\neg\tau_1) = \neg\ v(\tau_1)$$

$$v(\tau_1\rightarrow\tau_2) = v(\tau_1)\rightarrow v(\tau_2)$$

$$v(\Lambda x\tau_1) = \Lambda x v(\tau_1)$$

$$v(\Lambda\alpha\tau_1) = \Lambda\alpha v(\tau_1)$$

Estas reglas tienen poco que comentar, son sencillamente las más naturales al evaluar un término. Por ejemplo respecto a a.1 lo natural es que si tenemos una expresión que habla de un determinado elemento n al evaluarla nos estamos refiriendo precisamente a dicho elemento n del dominio. A partir de esta definición los siguientes lemas son inmediatos:

1.2.4 La valoración de cualquier término individual es un nombre individual.

1.2.5 La valoración de cualquier término gramatical es una expresión del lenguaje. Es más, si dicho término es una expresión la valoración de dicho término es dicha expresión (es decir es él mismo).

Ahora es el momento de dar una serie de definiciones sintácticas adicionales. Empezaremos definiendo qué se entiende por aparición directa de una variable en un término. Intuitivamente una aparición de una variable en un término es directa ssi el valor asignado por una valoración a dicho término depende del valor que asigne a la variable. Por ejemplo en el término $\alpha\to\beta$, tanto $\alpha$ como $\beta$ aparecen directamente, ya que el valor asignado a $\alpha\to\beta$ por v es $v(\alpha)\to v(\beta)$, que depende de $v(\alpha)$ y de $v(\beta)$. Sin embargo en el término: $\alpha\to A(\beta)$ el valor asignado es $v(\alpha)\to A(\beta)$ (la valoración de una expresión es dicha expresión), luego $\beta$ no aparece directamente. El concepto de aparición directa es interesante definirlo también para variables individuales, ya que puede haber lenguajes en los cuales aparezcan nombres tales como:

"f(x)"

que se podría tomar como el nombre del término f(x). No siendo dificil distinguir estos casos en los que la variable aparece dentro de un nombre individual, lo hacemos por completar el estudio.

1.2.6 Una aparición de una variable individual x en un termino individual es directa ssi no forma parte de ningun nombre individual.

(cómo se ve no se necesita mucho para considerar este caso ).

1.2.7 Una aparición de una variable gramatical $\alpha$ en un término gramatical $\tau$ es directa en los casos especificados a continuación:

a) Si $\tau$ es una expresión ninguna aparición de variables gramaticales es directa.

b) Si $\tau$ es una variable gramatical $\beta$, $\alpha$ aparece directamente en $\beta$ ssi $\alpha = \beta$.

c) (Paso de inducción). Las apariciones directas de $\alpha$ en $\neg\tau$, a, $\Lambda x\tau_1$ y $\Lambda\alpha\tau_1$ son precisamente las apariciones directas en $\tau_1$; mientras que en $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ son las apariciones directas tanto en $\tau_1$ como en $\tau_2$.

Estas definiciones recogen sencillamente las ideas expresadas anteriormente.

La definición de variable ligada es la clásica y pocos comentarios hay que hacer:

1.2.8 Una aparición de una variable individual x[gramatical $\alpha$] es ligada en una expresión $\xi$ ssi se da uno de los siguientes casos:

a) Es la x de un $\Lambda x$ [el $\alpha$ de un $\Lambda\alpha$] o

b) se halla dentro del radio de acción de un $\Lambda x$ [$\Lambda\alpha$].

Sin embargo, obsérvese que en la expresión:

$$\Lambda x\ F_1^{1,1}\ [x,\ A(x)] \qquad (1)$$

la tercera aparición de x es ligada, pues aparece dentro del rango del cuantificador $\Lambda x$; a pesar de ello no esta ligada en el sentido clásico. Lo que la expresión (1) señala es que se verifica una cierta relación entre todos los individuos x y la expresión A(x). La x de A(x) no varía en absoluto al recorrer el cuantificador el dominio de individuos. Se puede decir por ello (por utilizar un término común) que es opaca.

El concepto de aparición opaca es un poco el contrario de aparición directa. La principal diferencia por la cual no decimos que una aparición de una variable es opaca ssi no es directa es que el concepto de opacidad lo vamos a dejar restringido a expresiones (cuando ya los términos aparecen como argumentos de las mismas) mientras que el de aparición directa se refiere en general a términos.

Las definiciones son concretamente las siguientes; consideramos primeramente solo expresiones atómicas:

1.2.9 Una aparición de una variable individual en una expresión atómica $F_r^{p,q}$ $(t_1,\ldots,t_p;\ \tau_1,\ldots,\tau_q)$ es opaca ssi se da uno de estos dos casos:

a) Dicha aparición se sitúa en un término gramatical.

b) Dicha aparición se sitúa en un término individual y no es directa en dicho término.

Por último es fácil generalizar el concepto a cualquier tipo de expresiones.

1.2.10 Las apariciones opacas de la variable $x[\alpha]$ en $\neg\xi_1$ $\xi_1\rightarrow\xi_2$, $\Lambda y\xi_1$ y $\Lambda\beta\xi_2$ son precisamente las que posea en $\xi_1$ y (en su caso) en $\xi_2$; pudiendo $x[\alpha]$ coincidir o no con $y[\beta]$.

Así por ejemplo en la expresión (1) que anteriormente comentábamos, la tercera aparición de x sería no solo ligada, sino también opaca. Sin embargo en:

$$\Lambda x\ F_1^{1,1}\ (x,\ A(y))$$

la aparición de y no es ligada, aunque si opaca.

Nos queda por precisar un concepto importante: el de variable libre.

1.2.11 Una aparición de una variable en una expresión es libre ssi no es ni ligada ni opaca.

Lo que constituye el clásico concepto de variable libre, al haber tenido en cuenta las salvedades que puede introducir nuestra sintaxis.

Esto completaría el cuadro clásico de posibilidades de aparición de una variable.

No obstante nos va a ser muy útil una definición adicional: la de variable crítica que intuitivamente hablando es aquella que interviene en un predicado de verdad. Así $\alpha$ sería crítica en $V(\alpha)$; sin embargo no desearíamos decir que lo fuese en $\Lambda\alpha V(\alpha)$, ya que aquí se podía haber usado cualquier otra variable gramatical y el resultado de evaluar la expresión (el significado de la misma) sería independiente del valor asignado a $\alpha$.

Para simplificar el enunciado de la definición de variable crítica (que se hace un poco enrevesado al intentar contemplar todos los casos posibles), es preferible introducir un poco de terminología:

1.2.12 Se dice que un término gramatical $\tau$ contiene a una expresión atómica $\xi$ como subfórmula en los casos especificados :

a) Si el término gramatical es una expresión atómica, su única subfórmula es ella misma.

b) Si el término es una variable gramatical, carece de subfórmulas.

c) Si el término es de la forma $\neg\tau_1$, $\Lambda x\tau_1$, $\Lambda y\tau_1$ o $\tau_1\rightarrow\tau_2$, sus subfórmulas son las de $\tau_1$ y, en su caso, las de $\tau_2$.

1.2.13 Una variable gramatical $\alpha$ es crítica en una expresión $\xi$ ssi posee una aparición directa en un término $\tau_1$ tal que, $V(\tau_1)$ es una subfórmula de dicha expresión y además dicha aparición es libre en la expresión $\xi$ considerada.

## 1.3 El problema de la definición de la verdad

Con lo que hasta ahora tenemos trabajado habría material suficiente para empezar a hablar de satisfacción y verdad de no ser por el problema de que deseamos que nuestro lenguaje incluya un predicado de verdad.

Es fácil dar una definición de verdadero para expresiones que no incluyen este predicado; simplemente se trata de la clásica definición tarskiana; Si ahora consideramos una expresión que hable sobre la verdad de este tipo inicial de expresiones, podemos dilucidar si esta segunda expresión es verdadera o no simplemente en base a que por la definición tarskiana ya sabemos si las primeras lo son o no. Y el proceso se podría iterar indefinidamente, al fin y al cabo esta es la idea de Tarski: crear una jerarquía de lenguajes: lenguaje objeto, meta-lenguaje,...

El problema para lograr llevar a cabo esto dentro de un único lenguaje radica en las palabras "...que habla sobre la verdad de este tipo inicial..."; puesto que al introducir cuantificadores $\Lambda\alpha$, ya no nos estamos refiriendo sólo al tipo inicial de expresiones (incluídas aquellas cuya verdad tratamos de dilucidar), creándose así un círculo vicioso. Hay una salida clara y es considerar que al introducir un cuantificador $\Lambda\alpha$ sólo nos estamos refiriendo a aquellas expresiones del tipo adecuado; es decir a las que "caen por debajo" de la dada. Así pues una posible solución (que es la que nosotros hemos escogido) radica en considerar que el rango del cuantificador esta implicitamente limitado por el tipo de expresión al que acompaña. Naturalmente no siempre dicho rango está limitado, si la expresión a la que acompaña no contiene a la variable dentro de un predicado de verdad (más concretamente, si no es crítica) entonces no hay por qué limitarlo, pues el problema surge unicamente con este predicado. De aqui la importancia de las variables críticas: son aquellas que tendrán el rango limitado y que de hecho obedecerán a una lógica un poco distinta a la clásica. Ciertamente este enfoque tiene sus ventajas y desventajas; entre las primeras claramente estan:

- Seguimos en una lógica clásica bivalente.

- Vamos a poseer un predicado de verdad dentro del lenguaje.

- No hay una estructura de infinitos lenguajes cada uno con un predicado de verdad para el anterior, sino un único lenguaje (aunque con una estructura implícita de niveles).

En cuanto a las desventajas, éstas ya se presentarán por sí solas y no es conveniente desanimar al lector en este punto; así pues, le ahorraremos los dolores de cabeza para más adelante (de todas formas también habrá resultados agradables adicionales).

Esta es la visión intuitiva de lo que vamos a hacer, pero para llevarlo a cabo necesitamos clasificar las expresiones en una serie de niveles y no sólo las expresiones, sino también los términos gramaticales (de los cuales las expresiones son un subconjunto) y además las valoraciones. Llamaremos $\Omega$ al conjunto de los términos gramaticales y G al de las valoraciones y en general de notaremos por subíndices los diferentes niveles; además llamaremos A al conjunto de todas las variables gramaticales.

1.3.1. Definición inductiva de $E_n$ y $\Omega_n$:

a) $E_1$ es el cierre universal del conjunto de todas las expresiones atómicas.

$F_r^{p,q}\ (t_1,\ldots t_p;\tau_1,\ldots\tau_q)$

siendo $F_r^{p,q} \neq V$ bajo las operaciones de:

- Complementación
- Implicación
- Generalización (tanto respecto de las variables individuales como de las gramaticales.

α) $\Omega_1$ será el cierre universal del conjunto $E_1 \cup A$ bajo las mismas operaciones.

Ello completa el paso base.

Supongamos dada la definición de $E_n$ y $\Omega_n$; llamaremos $V(\Omega_n)$ al conjunto de todas las expresiones de la forma $V(\tau)$ con $\tau \varepsilon \Omega_n$. Entonces:

b) $E_{n+1}$ es el cierre de $E_n \cup V(\Omega_n)$ bajo las mismas operaciones antes citadas.

β) $\Omega_{n+1}$ es el cierre de $E_{n+1} \cup A$ bajo dichas operaciones.

Ello completa la definición inductiva. Naturalmente dado que el cierre universal contiene a los conjuntos de los que se parte es fácil ver que:

$$E_j \subset E_k \text{ si } j \leq k.$$

y

$$\Omega_j \subset \Omega_k \text{ si } j \leq k.$$

Por otra parte también es fácil probar por inducción que si una expresión contiene como mucho n veces el símbolo V, entonces pertenece a $E_{n+1}$. Por tanto para cada expresión habrá un n tal que pertenezca a $E_{n+1}$; así pues:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

Otro tanto se puede decir de los conjuntos $\Omega$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$$

Obsérvese que las expresiones de $E_1$ no contienen el predicado verdadero, mejor dicho no dicen nada acerca de la verdad de otras expresiones; las de $E_2$ como mucho hablarán de la verdad de las de $E_1$, etc.

Hemos de clasificar ahora las valoraciones; la necesidad de hacer esto radica en que las valoraciones asignan a las variables gramaticales expresiones, luego si queremos que las expresiones de un determinado nivel (grado) hablen implicitamente sólo de las de grado inferior no hemos de tener en cuenta al evaluarlas más que aquellas valoraciones que asignen a las variables gramaticales de la expresión dada expresiones del grado adecuado. Además, ya vemos que la clasificación depende del conjunto de variables a considerar. Por ello la definición es la siguiente:

1.3.2. Una valoración v pertenecerá al conjunto $G_n(B)$, siendo B un conjunto finito de variables gramaticales, ssi asigna a todas las variables en B expresiones de $E_n$.

Es evidente en base a esta definición y a que $E_j \subset E_k$ si $j \leq k$ que:

$$G_j(B) \subset G_k(B) \text{ si } j \leq k$$

Además dado que el conjunto B de variables gramaticales es finito siempre habrá para cada valoración un m tal que $v(\alpha) \varepsilon E_m$ para cualquier $\alpha \varepsilon B$; es decir siempre hay un m tal que $v \varepsilon G_m(B)$; por lo tanto.

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m(B) = G$$

Si el conjunto B no fuese finito no hubiésemos podido demostrar esto, pero no nos importa imponer esta restricción ya que la aplicación que tenemos en mente es la evaluación de expresiones, y los conjuntos de variables gramaticales que nos puedan aparecer son finitos.

El siguiente lema tiene una cierta importancia; la idea de introducir esta clasificación de las valoraciones es poder luego (al considerar las expresiones de un grado determinado) trabajar sólo con un conjunto bién definido de valoraciones.

Ahora bién en estas expresiones aparecerán no sólo variables gramaticales sino en general términos gramaticales y hay que asegurarse de que si una valoración no asigna a las variables más que expresiones de un determinado grado, el valor asignado al término es del grado adecuado.

1.3.3 Lema:

Si $\tau\varepsilon\Omega_n$ y $v\varepsilon G_n(B)$ conteniendo B al conjunto de variables gramaticales que se presentan directamente en $\tau$, entonces $v(\tau)\varepsilon E_n$.

La prueba es por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de los que conste $\tau$.

a) Paso base, hay dos casos:

- $\tau$ es una expresión $\xi$; en tal caso $\xi\varepsilon E_n$; pero entonces $v(\tau) = v(\xi) = \xi\varepsilon E_n$.

- $\tau$ es una variable gramatical $\alpha$, como dicha variable gramatical se presenta directamente en $\tau$ y $v$ asigna a dicho tipo de variables expresiones de $E_n$: $v(\tau)\varepsilon E_n$

b) Paso de inducción; si $\tau_1$ y $\tau_2$ verifican el lema, entonces:

$$v(\neg\tau_1) = \neg v(\tau_1)\varepsilon E_n$$

$$v(\tau_1\rightarrow\tau_2) = v(\tau_1)\rightarrow v(\tau_2)\varepsilon E_n$$

$$v(\Lambda x\tau_1) = \Lambda x v(\tau_1)\varepsilon E_n$$

$$v(\Lambda\alpha\tau_1) = \Lambda\alpha v(\tau_1)\varepsilon E_n$$

Ya que $E_n$ se halla cerrado respecto a las operaciones de complementación, implicación y generalización. Lo cual demuestra el lema.

En general las demostraciones las incluiremos en los apendices, en especial si son demasiado largas o no aportan más ideas de las que aporte el enunciado a demostrar; ya que así se simplifica la lectura del presente trabajo.

Estamos ya en posición de definir lo que entendemos por que una valoración satisfaga una expresión y por que una expresión sea verdadera; la definición naturalmente va a tener un caracter inductivo, pero no sólo respecto a la complejidad de las expresiones (número de conectivas y/o cuantificadores) sino también en cuanto al grado al que pertenece la expresión: primero se dará la definición para $E_1$ (paso base) y luego supuesta dada para $E_n$ se dara para $E_{n+1}$. Para simplificar y poder discutir un poco la definición a medida que la vamos dando, vamos a estudiar separadamente los dos pasos.

1.3.4 Definición de satisfacción (respecto de una interpretación dada) para expresiones de $E_1$ (paso base):

La definición es la de Tarski directamente, pero recordemosla:

I) Una valoración $v \varepsilon G$ satisface una expresión

$$F_r^{p,q}\ (t_1,..,t_p;\tau_1,...,\tau_q) \quad (F_r^{p,q} \neq V).$$

ssi se verifica la relación:

$$\bar{F}_r^{p,q}\ [v(t_1),...,v(t_p);v(\tau_1),...,v(\tau_q)]$$

II) v satisface una expresión $\neg \xi_1$ ssi no satisface $\xi_1$

III) v satisface $\xi_1 \to \xi_2$ ssi satisface $\xi_2$ o no satisface $\xi_1$.

IV) v satisface $\Lambda x \xi$ [$\Lambda \alpha \xi$] ssi toda valoración x-equivalente [$\alpha$-equivalente] a v satisface $\xi$.

En el apartado I) obsérvese que la definición es correcta porque si $F_r^{p,q} \neq V$, la expresión atómica pertenece a $E_1$ y debe estar definida la correspondiente relación. Los apartados siguientes son sencillamente el paso de inducción en la definición tarskiana. Naturalmente por valoración x-equivalente [$\alpha$-equivalente] a una dada entendemos toda aquella valoración que asigna a todas las demás variables (tanto individuales como gramaticales) los mismos valores excepto posiblemente a x [a $\alpha$]. Asimismo la definición de verdad para $E_1$ es la clásica.

1.3.5. Definición de verdad para expresiones de $E_1$:

Una expresión $\xi \varepsilon E_1$ es verdadera ssi es satisfecha por todas las valoraciones.

Esto completa realmente el paso base; en el paso de inducción vamos ya a diferir en cierta forma del esquema tarskiano, en el sentido precisamente de que para considerar a una expresión de $E_{n+1}$ verdadera no exigiremos que sea satisfecha por todas las valoraciones; sino sólo por aquellas que asignan a sus variables críticas expresiones de $E_n$ (recuerdese: las variables críticas son aquellas que intervienen en predicados de verdad y se hallan libres). De esta forma una expresión de $E_{n+1}$ implicitamente sólo se referira como mucho a la verdad de las expresiones de $E_n$. La idea en el fondo es la misma que la de Tarski pero sin desdoblar el lenguaje en infinitos lenguajes separados.

Para simplificar la escritura de aquí en adelante vamos a designar por $K\{\xi\}$ al conjunto de variables gramaticales críticas en la expresión $\xi$. $G_n[K\{\xi\}]$ a su vez designará al conjunto de valoraciones que asignan expresiones de $E_n$ a dichas variables críticas. Naturalmente si $K\{\xi\} =0$ ( conjunto vacío) entonces $G_n[K\{\xi\}]=G$. Además, alguna vez identificaremos $G_0$, $E_0$ y $\Omega_0$ con G, E, y $\Omega$ respectivamente.

En el paso de inducción que vamos a dar a continuación, supondremos definido para cualquier expresión $\xi\varepsilon E_n$, cuando una valoración $v\varepsilon G_{n-1}$ $[K\{\xi\}]$ satisfaga dicha expresión y cuando es verdadera. El paso base (n=1) evidentemente ha sido dado en forma correcta, pues se ha definido cuando una valoración cualquiera ($G_0$ = G) satisface $\xi\varepsilon E_1$ y cuando este tipo de expresiones son verdaderas. Para dar el paso de inducción necesitaremos pues definir cuando $v\varepsilon G_n[K\{\xi\}]$ satisface $\xi\varepsilon E_{n+1}$ y cuando estas expresiones son a su vez verdaderas; ahora bién como

$$G_{n-1}[K\{\xi\}] \subset G_n[K\{\xi\}]$$

y

$$E_n \subset E_{n+1}$$

se pueden presentar varios casos, que concretamente pueden ser los siguientes:

a: $\xi\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$; para estas expresiones nada ha sido definido todavía y habrá que hacerlo todo.

b: $\xi\varepsilon E_n$. Para estas, al menos ya ha sido definido cuando son verdaderas (hipótesis de inducción) y no hay que repetirlo, pero a su vez hay varios subcasos:

- b.1: $\xi\varepsilon E_1$; no hay nada que definir, todas las definiciones fueron dadas en el paso base.

- b.2: $\xi\varepsilon E_1$; aunque $\xi\varepsilon E_n$; por lo que n>1; hay a su vez dos subcasos:

b.2.1: $v \varepsilon G_{n-1}$ $[K\{\xi\}]$; no hay nada que definir, pues por hipótesis de inducción ha sido definido en el paso anterior.

b.2.2: $v \varepsilon (G_n - G_{n-1})$ $[K\{\xi\}]$; en este caso si es preciso definir cuando v satisface $\xi$.

Asi pues realmente sólo hay dos casos interesantes: el a. y el b.2.2. Las definiciones para $E_{n+1}$ (paso de inducción) las daremos asimismo por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de la expresión. Al definir cuando una valoración satisface una expresión, tras el paso base de las expresiones atómicas, supondremos que si $\xi_1$ tiene menos conectivas y/o cuantificadores que la considerada, entonces, ya estará definido cuando $v \varepsilon G_n$ $[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$ (hipótesis de inducción respecto a la complejidad de las expresiones). Pero procedamos:

1.3.6 Definición de cuando una valoración $v \varepsilon G_n$ $[K\{\xi\}]$ satisface $\xi \varepsilon E_{n+1}$.

I) Si la expresión es atómica hay dos casos:

- Que sea de la forma:

$$F_r^{p,q} (t_1, t_2, \ldots, t_p; \tau_1, \ldots \tau_q) \text{ con } F_r^{p,q} \neq V$$

en cuyo caso estamos en $E_1$ y no hay nada que definir, o bién:

- Que sea de la forma:

$$V(\tau) \text{ con } \tau \varepsilon \Omega_n$$

Entonces, tengase en cuenta que las variables críticas en $V(\tau)$ son precisamente las que aparecen directamente en $\tau$.

Por lo tanto, como $v\varepsilon G_n$ $[K\{V(\tau)\}]$ ello significa que asigna a las variables críticas en $\tau$ expresiones de $E_n$ y por el lema 1.3.5. antes demostrado $v(\tau)\varepsilon E_n$ y además por hipótesis de inducción esta definida entonces si la expresión $v(\tau)$ es verdadera o no, es decir si se verifica o no $\bar{V}(v(\tau))$. Como ya sabemos sólo hay que considerar dos casos: a. y b.2.2; pero ambos además se tratan de la misma forma:

a) $V(\tau)\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$; $v\varepsilon G_n$ $[K\{V(\tau)\}]$ v satisfará $V(\tau)$ ssi se verifica:

$$\bar{V}(v(\tau))$$

b.2.2) $V(\tau)\varepsilon E_n$; $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{V(\tau)\}]$ v satisfará $V(\tau)$ ssi se verifica:

$$\bar{V}(v(\tau))$$

Pasamos ahora a expresiones más complejas:

II) La expresión es de la forma $\neg\xi_1$. Asimismo ambos casos se tratan de igual forma:

a) $\neg\xi_1\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$; $v\varepsilon G_n$ $[K\{\neg\xi_1\}]$ v satisfará $\xi_1$.

b.2.2.) $\neg\xi_1\varepsilon E_n$; $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{\neg\xi_1\}]$ v satisfará $\neg\xi_1$ ssi no satisface $\xi_1$.

Obsérvese que la definición es correcta ya que naturalmente $G_n$ $[K\{\neg\xi_1\}]$ $=$ $G_n$ $[K\{\xi_1\}]$ y por lo tanto, por hipótesis de inducción respecto a la complejidad de las expresiones, debe estar ya definido cuando v satisface $\xi_1$.

III) La expresión es de la forma $\xi_1 \rightarrow \xi_2$. Analogamente ambos casos se tratan de igual modo a la manera clásica:

a) $\xi_1 \to \xi_2 \varepsilon (E_{n+1} - E_n)$, $v \varepsilon G_n[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ v satisfará $\xi_1 \to \xi_2$ ssi satisface $\xi_2$ o no satisface $\xi_1$.

b.2.2.) $(\xi_1 \to \xi_2 \varepsilon E_n$; $v \varepsilon (G_n - G_{n-1})$ $[K\{\xi \to \xi_2\}]$ v satisfará $\xi_1 \to \xi_2$ ssi satisface $\xi_2$ o no satisface $\xi_1$.

Observese que la definición es correcta puesto que si $v \varepsilon G_n$ $[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ ello significa que $v \varepsilon G_n[K\{\xi_1\}]$ y $v \varepsilon G_n$ $[K\{\xi_2\}]$ y por lo tanto (hipótesis de inducción respecto a la complejidad de las expresiones) esta definido si v satisface $\xi_1$ así como si satisface $\xi_2$.

IV) La expresión es de la forma $\Lambda x \xi_1$; (a la manera clásica ambos casos):

a) $\Lambda x \xi_1 \varepsilon (E_{n+1} - E_n)$; $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda x \xi\}]$ v satisfará $\Lambda x \xi_1$ ssi toda valoración x-equivelente a v satisface $\xi_1$.

b.2.2) $\Lambda x \xi_1 \varepsilon E_n$; $v \varepsilon (G_n - G_{n-1})$ $[K\{vx\xi_1\}]$ v satisfará $\Lambda x \xi_1$ ssi toda valoración x-equivalente a v satisface $\xi_1$.

La definición es correcta dado que $G_n[K\{\Lambda x \xi_1\}] = G_n[K\{\xi_1\}]$; además, si $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda x \xi_1\}]$ y v' es x-equivalente a v, como no se diferencia en los valores asignados a las variables gramaticales, $v' \varepsilon G_n[K\{\Lambda x \xi_1\}]$; por tanto, por hipótesis de inducción respecto a la complejidad de las expresiones, debe estar definido cuando cualquier valoración v' x-equivalente a v satisface $\xi_1$.

V) La expresión es de la forma $\Lambda \alpha \xi_1$. Nótese que si $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda \alpha \xi_1\}]$ esto no necesariamente significa que v (o valoraciones $\alpha$-equivalentes a ella) pertenezcan a $G_n[K\{\xi_1\}]$, ya que $\xi_1$ puede contener una variable crítica más que $\Lambda \alpha \xi_1$: la propia $\alpha$. Por tanto no nos podemos apoyar en la hipótesis de inducción para decir que ya está definido para las valoraciones $\alpha$-equivalentes a v si satisfacen o no a $\xi_1$. Sin embargo ello no nos va a importar, pues unicamente vamos a considerar aquellas valoraciones $\alpha$-equivalentes a v que asignen a las variables críticas de $\xi_1$ expresiones de $E_n$; es decir no todas las valoraciones $\alpha$-equivalentes a la dada sino precisamente a $G_n[K\{\xi\}]$ (que puede incluso no contener a la propia v), pero hagamoslo:

a) $\Lambda\alpha\xi_1 \varepsilon (E_{n+1} - E_n)$; $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$ v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v' \varepsilon G_n[K\{\xi\}]$ satisface $\xi_1$.

b.2.2.) $\Lambda\alpha\xi_1 \varepsilon E_n$; $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$ v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v' \varepsilon G_n[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$.

(cómo se ve también en este caso tratamos ambas posibilidades de igual forma).

Ello finaliza la definición inductiva de cuando una valoración satisface una expresión (salvo que nos queda por definir cuándo una expresión de $E_{n+1}$ es verdadera).

El "truco" realmente se halla en el apartado V) en donde limitamos el rango de los cuantificadores de forma que implicitamente sólo se refieran a expresiones de grados inferiores. Por último sólo es necesario definir cuándo una expresión de $E_{n+1} - E_n$ es verdadera (para $E_n$ ya ha sido definido):

1.3.7. Definición de verdadero para $\xi\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$:

$\xi\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ será verdadera ssi toda valoración $v\varepsilon Gn[K\{\xi\}]$ satisface dicha expresión.

Esta serie de definiciones que hemos dado tiene la desventaja de que va contemplando caso por caso y se vuelve repetitiva; para usos prácticos sería mejor disponer de un resumen de la misma y ello es lo que vamos a proporcionar a continuación con la siguiente serie de lemas:

1.3.8 Lema:

Una valoración v satisface una expresión de la forma $V(\tau)$ ssi se verifica $V(v(\tau))$.

1.3.9 Lema:

Una valoración v satisface una expresión atómica:

$$F_r^{p,q}\ (t_1,\ldots,t_p;\tau_1,\ldots,\tau_q)$$

ssi se verifica:

$$\bar{F}_r^{p,q}\ (v(t_1),\ldots,v(t_p);v(\tau_1),\ldots,v(\tau_q))$$

1.3.10 Lema:

Una valoración v satisface una expresión de la forma $\neg\xi 1$ ssi no satisface $\xi$.

1.3.11 Lema:

Una valoración v satisface una expresión de la forma $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ ssi satisface $\xi_2$ o no satisface $\xi_1$.

1.3.12 Lema:

Una valoración v satisface una expresión de la forma $\Lambda x \xi_1$ ssi toda valoración x-equivalente a v satisface $\xi_1$.

Para el último caso por desgracia no es posible dar tal resumen, sino que simplemente hay que limitarse a repetir la definición, pero lo incluímos por tener la serie completa de lemas:

1.3.13 Lema:

Si una expresión es de la forma $\Lambda\alpha\xi_1$ entonces si:

- $\Lambda$_ξ1 $\varepsilon E_1$ una valoración v satisfará dicha expresión ssi toda valoración v' α-equivalente a v satisface $\xi_1$.

Mientras que si se da uno de estos casos ($n \geq 1$).

- $\Lambda\alpha\xi_1 \varepsilon (E_{n+1} - E_n)$ y $v\varepsilon G_n\ [K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$; o bién:

- $\Lambda\alpha\xi_1\ \varepsilon E_n$ y $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$ v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración v' α-equivalente a v y tal que $v'\varepsilon G_n\ [K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$.

1.3.14 Lema:

Una expresión $\xi$ es verdadera ssi:

- En caso de que $\xi\ \varepsilon E_1$, $\xi$ sea satisfecha por todas las valoraciones.

- O bién, en caso de que $\xi\ \varepsilon E_{n+1} - E_n$ ($n \geq 1$) sea satisfecha por todas las valoraciones $v\varepsilon G_n[K\{\xi\}]$.

Realmente este último lema es también un resumen para tenerlo a mano y no tener que andar dando vueltas en la definición inductiva original. Todos ellos son evidentes y por tanto no nos molestaremos en dar una demostración rigurosa.

Los siguientes lemas son muy intuitivos, pero su demostración es un tanto pesada y sin gran interés, por lo que la dejaremos para el apéndice de demostraciones.

1.3.15 Lema:

Sean v y w dos valoraciones que asignan a todas las variables presentes directamente en el término individual t [gramatical $\tau$] los mismos valores; entonces $v(t) = w(t)$ [$v(\tau) = w(\tau)$].

1.3.16 Lema:

Sean v y w dos valoraciones que asignan a todas las variables libres en una expresión $\xi$ los mismos valores; entonces v satisface $\xi$ ssi w la satisface también.

Cómo se ve se trata de la "propiedad de localidad"; sólo las variables presentes localmente (es decir en la expresión considerada) importan a la hora de decidir si una valoración satisface una expresión o no.

1.3.17 Lema:

Si $\xi$ es una expresión sin variables libres, entonces, o bién toda valoración la satisface, o bién ninguna la satisface.

Ello es evidente, ya que a partir del lema anterior si $\xi$ carece de variables libres entonces dadas dos valoraciones cualesquiera v y w trivialmente cumplirán la condición requerida por dicho lema (asignarán a todas las variables libres de $\xi$ los mismos valores); por lo tanto una la satisfará ssi la otra lo hace. Es decir si una valoración satisface $\xi$ todas lo hacen y si una no lo hace ninguna lo hace.

1.3.18 Corolario:

Dada una expresión $\xi$ sin variables libres, entonces o bien $\xi$ o bien $\neg\xi$ son satisfechas por todas las valoraciones.

Evidente, ya que al carecer $\xi$ de variables libres entonces o bien toda la valoración satisface $\xi$ y ninguna $\neg\xi$, o bien ninguna satisface $\xi$ y por lo tanto todas satisfacen $\neg\xi$.

1.3.19 Corolario:

Dada una expresión $\xi$ sin variables libres entonces o bien $\xi$ o bien $\neg\xi$ son verdaderas, pero no ambas.

Ello es evidente en base al corolario anterior.

1.3.20 Nota:

Obsérvese que no es posible nunca que una expresión y su negación sean ambas verdaderas, pues si todas las valoraciones de $Gn[K\{\xi\}]$ satisfacen $\xi$ es imposible que todas satisfagan $\neg\xi$.

1.3.21 Lema:

Una expresión $\xi$ sin variables críticas es verdadera ssi toda valoración la satisface.

Este lema es evidente en virtud del anterior lema 1.3.14, ya que si la expresión carece de variables críticas entonces toda valoración pertenece trivialmente a $G_n[K(\xi)]$;

por lo tanto, sea cual sea el grado de la expresión sera verdadera ssi toda valoración la satisface.

Los corolarios y observaciones anteriores simplemente indican que los conceptos de "verdadero" y "satisfecho por una valoración" tienen al menos algunas de las propiedades que era razonable esperar.

Con ello se podría dar por acabada la presentación, sin embargo, antes de pasar a desarrollar una axiomática y un cálculo deductivo, queremos presentar algunos ejemplos sencillos de aplicación, para que resulten mas patentes las posibilidades de estos sistemas.

## 1.4 Ejemplos de aplicación

### 1.4.1 La paradoja del mentiroso.

Como es sabido esta paradoja es atribuída al cretense Epiménides del que se asegura que dijo:

"Todos los cretenses son mentirosos"

(Se puede ver en [Ross 70] una serie de comentarios acerca del origen de dicha paradoja). Esta se puede refinar aun más si se supone que hubiese dicho:

"Todo lo que digo es mentira"

y que jamás hubiese pronunciado ninguna otra palabra. Entonces (intuitivamente) si suponemos que es cierto lo que afirma, se deduce a continuación que es falso (pues es cierto que todo lo que dice es falso). Si por el contrario lo suponemos falso, debe haber algo que haya dicho que sea cierto; como lo único que ha pronunciado jamás es precisamente esa afirmación, entonces debe ser cierta.

Asi pues, no parece haber forma de escapar a la paradoja. Veamos cómo se comportan nuestros sistemas respecto a ella. Supongamos que $S(x,\alpha)$ simboliza la relación: "el individuo x pronuncia la frase $\alpha$". Sea Epi la abreviatura de Epiménides, entonces el problema planteado es que se verifica la relación:

$$\bar{S}[Epi, \Lambda\alpha \{S(Epi,\alpha) \to \neg V(\alpha)\}]$$

No verificándose $\bar{S}[Epi,\xi']$ para ninguna otra expresión que no sea la indicada arriba. El problema que se plantea es naturalmente averiguar si lo que dice Epiménides es cierto o no (o si realmente se obtiene una paradoja). Para abreviar escritura llamaremos $\xi_1$ o bien $\Lambda\alpha\xi_2$ a lo que afirma este buen señor, es decir a:

$$\Lambda\alpha \{S(Epi,\alpha) \to \neg V(\alpha)\}$$

Es evidente que $\xi_1$ pertenece a $E_2 - E_1$, ya que contiene a la subfórmula $V(\alpha)$. Por lo tanto será verdadera ssi toda valoración $v\varepsilon G_1[K\{\xi_1\}$ satisface dicha expresión; pero por carecer $\xi_1$ de variables libres cualquier valoración pertenece trivialmente a $G_1[K\{\xi_1\}]$. Asi pues consideremos una valoración v cualquiera; satisfará $\xi_1$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a v tal que $v'\varepsilon G_1[K\{\xi_2\}]$ satisface $\xi_2$; pero en $\xi_2$ (es decir en $S(Epi,\alpha)\to \neg V(\alpha)$) la misma variable crítica es precisamente $\alpha$. Asi pues sólo nos hemos de preocupar por las variables que asignen a $\alpha$ expresiones de $E_1$. Pero el único caso en el que una valoración no satisfaría $\xi_2$ sería aquel en el que satisfaciese $\neg V(\alpha)$. Sin embargo esto no es posible para valoraciones $v'\varepsilon G_1[K\{\xi_2\}]$ ya que el único caso en el que se verificaría $S\ [Epi,v'(\alpha)]$ es aquel en el cual $v'(\alpha) = \xi_1$; cosa que no es posible ya que $\xi_1 \varepsilon E_2 - E_1$. Asi pues cualquier tal valoración v' satisface $\xi_2$ y por lo tanto Epiménides dijo la verdad.

Lo que hemos hecho en el fondo no es mas que cortar un círculo vicioso. Cuando Epiménides afirma que todo lo que dice es mentira, nosotros supondremos que esta afirmación implicitamente se refiere a otras (de grado inferior); si no hay ninguna mas, entonces bivalentemente es cierto; esta sería el menos la explicación intuitiva.

1.4.2. Referencia indirecta.

Son bien conocidos los problemas que plantea la referencia indirecta, un ejemplo típico es el que McCarthy menciona y al que nos hemos referido en la introducción; pero, por poner otro ejemplo conocido, veamos la llamada paradoja de Electra:

a) Electra no sabe que el hombre frente a ella es Orestes.

b) El hombre frente a ella es Orestes.

Luego intuitivamente, sustituyendo "el hombre frente a ella" por "Orestes", dado que denotan la misma persona:

c) Electra no sabe que Orestes es Orestes.

Lo cual es harto dudoso. Abreviemos "el hombre frente a ella" por hfe entonces el anterior argumento se puede formalizar como:

a) $\neg$ Sabe [Electra, hfe = Orestes]

b) hfe = Orestes

c) $\neg$ Sabe [Electra, Orestes = Orestes]

Pero, aun en el supuesto caso de que hubiésemos desarrollado una teoría de la igualdad, la conclusión c) no esta correctamente obtenida de las premisas, pues no es una simple cuestión de sustituir el término individual "hfe" por "Orestes"; sino que lo que realmente hemos hecho ha sido sustituir el término gramatical "hfe = Orestes" por "Orestes = Orestes"; cosa que no está justificada. Simplemente no es válida la sustitución de términos individuales en sus apariciones opacas.

### 1.4.3 El teorema de incompletitud de Gödel.

Como es sabido este teorema está muy relacionado con la paradoja del mentiroso; corresponde al análisis de una expresión que dijese de si misma "yo no soy demostrable" en vez de "yo no soy verdadera". Así pues, tras analizar la paradoja del mentiroso, parece este el momento para hablar de dicho teorema.

Dado el poder expresivo de nuestros lenguajes, es muy fácil demostrar alguna variante de dicho teorema de Gödel. Supongamos que se ha definido de alguna forma un conjunto de axiomas, así como un conjunto de reglas de inferencia. No importa concretamente cuáles sean estos conjuntos, en tanto en cuanto se definan sin hacer referencia al concepto de verdadero (no se apoyen en él) sino que sean definiciones sintácticas en principio; de hecho tampoco importa que sean o no recursivas o recursivamente enumerables. Lo único importante es que la propiedad de ser teorema se pueda definir con anterioridad e independencia de la de ser verdadero.

Por tanto, la propiedad $\bar{G}$ definida de la forma: $\bar{G}(\xi)$ se verifica ssi $\xi$ contiene unicamente la variable libre $\alpha$ y es teorema $\xi(\xi(\alpha))$; $\bar{G}$ tiene una definición que es por completo independiente de la definición de verdadero (en caso contrario como $\bar{V}$ es la última propiedad a definir estaríamos introduciendo un círculo vicioso). Por lo tanto podemos permitirnos el asignarle a dicha propiedad $\bar{G}$ un nombre G. Formemos la expresión:

$$\neg G\ (\neg G(\alpha))$$

Si esta expresión es cierta, significa que no se verifica:

$\bar{G}\ (\neg G(\alpha))$ $\qquad (\xi \text{ es } \neg G(\alpha))$

y dado, que $\neg G(\alpha)$ contiene unicamente como variable libre $\alpha$, ello solo puede ser debido a que no es teorema la expresión:

$\neg G\ (\neg G(\alpha))$

es decir, a que dicha expresión, siendo cierta no es teorema.

Por el contrario si dicha expresión es falsa, significa que se verifica:

$\bar{G}\ (\neg G(\alpha))$

y por tanto que es teorema:

$\neg G\ (\neg G(\alpha))$

Es decir que tenemos una expresión falsa como teorema. Asi pues esta expresión es teorema ssi es falsa.

Dicho de otra forma, sea cual sea el sistema deductivo es imposible conseguir una axiomatización de la propiedad G; lo cual es un resultado relacionado con el primer teorema de incompletitud de Gödel. Hay que mencionar por último que Raymond Smullyan [Smul 57] obtuvo hace años resultados similares basándose también en lenguajes en los que era sencilla la auto-referencia.

## 2. El sistema básico

### 2.1 Introducción

Dado que poseemos ya unos lenguajes y una semántica de los mismos, el siguiente paso a dar es establecer un cálculo deductivo minimamente apropiado a dicha semántica; es decir establecer un conjunto de axiomas y un conjunto de reglas de deducción, que es lo que vamos a hacer a continuación.

Ahora bien, los teoremas de nuestro sistema los vamos a clasificar en dos grupos: los verdaderos (B) y los auténticos (A) estos constituirán un subconjunto de los anteriores. La razón de esta clasificación se puede explicar con ayuda de las siguientes definiciones:

2.1.1 Definición:

Se dice que una expresión es auténtica (en una interpretación dada) ssi es satisfecha por todas las valoraciones.

2.1.2 Definición:

Se dice que una expresión es lógicamente verdadera [auténtica] ssi es verdadera [auténtica] en todas las interpretaciones.

Como se ve la condición de ser auténtica es más fuerte que lo de ser verdadera, pues exige la satisfacción por todas las valoraciones y no solo por un grupo determinado. La utilidad de dicho concepto radica en que una gran parte de las expresiones verdaderas son también auténticas y en segundo lugar en que es posible realizar algunas simplificaciones si se sabe que una expresión es auténtica.

El siguiente lema indica hasta que punto puede ser grande el conjunto de expresiones auténticas:

2.1.3 Lema:

Si una expresión sin variables críticas es verdadera entonces es auténtica.

Ello es evidente en base al lema 1.3.14. Si la expresión $\xi$ pertenece a $E_1$, entonces es verdadera ssi es satisfecha por todas las valoraciones; es decir ssi es auténtica. Por otra parte si $\xi$ pertenece a $(E_{n+1} - E_n)$ $(n\geq 1)$ será verdadera ssi es satisfecha por todas las valoraciones $v\varepsilon G_n[k\{\xi\}]$ y por lo tanto $\xi$ es verdadera ssi es auténtica.

Este lema indica unicamente un "límite inferior" del conjunto de expresiones auténticas; por ejemplo la expresión $V(\alpha) \rightarrow V(\alpha)$ es auténtica (es de hecho una tautología) y sin embargo no es clasificada como tal por el lema anterior dado que al ser $\alpha$ crítica dicho lema no afirma nada sobre esta expresión. De hecho en la lista de axiomas (de esquemas axiomáticos) que escribiremos dentro de poco, solo va a haber uno del cual no podemos asegurar que sea logicamente auténtico, pero que naturalmente al menos será logicamente verdadero.

Aparte de clasificar los teoremas también tendremos que clasificar las reglas de deducción, según que es lo que nos permitan obtener si expresiones auténticas o tan solo verdaderas; con ello la situación resulta algo más complicada y es preciso definir con cuidado que sucesiones de expresiones constituyen demostraciones válidas. Pero procedamos:

## 2.2 Axiomas

2.1.1 Definición

Los axiomas lógicos son los dados por todas las instancias de los siguientes esquemas axiomáticos ($\xi_1$, $\xi_2$, y $\xi_3$ se supone que indican expresiones cualesquiera, $\tau_1$ y $\tau_2$ términos gramaticales cualesquiera, etc.):

A.1: $\xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_1)$

A.2: $(\xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_3)) \rightarrow ((\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \xi_3))$

A.3: $(\neg\, \xi_1 \rightarrow \neg\, \xi_2) \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_1)$

A.4:

I) $\Lambda x \xi_1 \rightarrow \xi_1$; si x no aparece libre en $\xi_1$
II) $\Lambda \alpha \xi_1 \rightarrow \xi_1$; si $\alpha$ no aparece libre en $\xi_1$

A.5:

I) $\Lambda x \xi(x) \rightarrow \xi(t)$; si t esta libre para x en $\xi(x)$.
II) $\Lambda \alpha \xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$; si $\tau$ esta libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ y además, en caso de que $\xi(\alpha)\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ con $n \geq 1$ siendo $\alpha$ crítica en $\xi(\alpha)$, se tenga que $\tau\varepsilon\Omega_n$

A.6:

I) $\Lambda x(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \Lambda x\, \xi_2)$; si $\xi_1$ no tiene apariciones libres de x.
II) $\Lambda \alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \Lambda \alpha\, \xi_2)$; si $\xi_1$ no tiene apariciones libres de $\alpha$.

A.7:

I) $V(\tau) \rightarrow \neg V(\neg \tau)$
II) $\neg V(\neg \xi_1) \rightarrow V(\xi_1)$; si $\xi_1$ carece de variables libres.

A.8:

I) $\xi_1 \rightarrow V(\xi_1)$; si $\xi_1$ carece de variables libres.
II) $V(\xi_1) \rightarrow \xi_1$; si $\xi_1$ carece de variables críticas.

A.9: $V(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (V(\xi_1) \rightarrow V(\xi_2))$; si en caso de que $\xi_1$ contenga variables críticas se verifica:

1) Si $\xi_1\ \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ y $\xi_2\ \varepsilon(E_{j+1} - E_j)$; $h \geqq j$
2) Ninguna variable crítica en $\xi_1$ es libre y no crítica en $\xi_2$

A.10:

I) $V(\xi_1) \rightarrow V(\Lambda x \xi_1)$
II) $V(\xi_1) \rightarrow V(\Lambda \alpha \xi_1)$

A.11:

I) $V(\xi_1) \rightarrow V(V(\xi_1))$
II) $V(V(\xi 1)) \rightarrow V(\xi_1)$

Antes de seguir vamos a comentar un poco el significado de este conjunto de axiomas; es evidente que los seis primeros esquemas axiomáticos, salvo por la restricción añadida a A.5 II son sencillamente lo que cabría esperar para un cálculo de predicados extendido a dos tipos de variables. En cuanto a dicha restricción, esta es completamente natural dentro de nuestro sistema; recuerdese que las expresiones de $E_{n+1} - E_n$ solo se refieren a la verdad de expresiones de $E_n$. Por dicho motivo las variables críticas solo pueden ser substituidas por términos de $\Omega_n$.

En cuanto al resto de los axiomas, en primer lugar A.7 I es el reconocimiento por parte del sistema de que si algo es verdad no puede serlo su negación. A.7 II es el converso, es decir la afirmación dentro del sistema del corolario 1.3.19: si la negación de una expresión cerrada no es verdadera, debe de serlo la propia expresión.

A.8 es un tanto especial; tomando ambas partes conjuntamente, es decir considerando solo expresiones sin variables libres, se llega a:

$$V(\xi_1) \leftrightarrow \xi_1$$

Algo que imaginamos que le hubiese encantado tener a Tarski, si bien la anterior relación no se verifica en general para cualquier expresión; sino tan solo para las cerradas es posible garantizarlo.

A.9 y A.10 son el reconocimiento por parte del sistema de las reglas Modus Ponens y generalización que luego veremos. Por último A.11 indica la redundancia de aplicar dos veces V.

El siguiente teorema indica porque a estos axiomas les podemos llamar axiomas lógicos:

2.2.2. Teorema:

Todas las instancias de los esquemas axiomáticos A.1 - A.11 son logicamente auténticas salvo (posiblemente) aquellas instancias de A.5. II en las que $\alpha$ sea crítica y $\tau$ no sea una expresión, que al menos son logicamente verdaderas.

Por desgracia es terriblemente largo demostrar este teorema, pues en algunos casos se precisa realizar un doble proceso de inducción: sobre el grado n de las expresiones y sobre la longitud de las mismas. Así pues, lo dejaremos para el apéndice.

Por otra parte hemos de decir que más que haber llamado a estos axiomas "los axiomas lógicos" habría que haberlos llamado "unos axiomas lógicos", pues en este momento no sabemos si realmente el sistema obtenido es completo en el sentido de que(junto con las reglas de deducción) sea capaz de generar todas las expresiones lógicamente verdaderas o todas las logicamente auténticas. La razón fundamental de haber escogido estos axiomas es que, al menos, permiten formular un (meta-) teorema de deducción y que hemos precisado de todos ellos para demostrar dicho teorema.

## 2.3 Reglas de deducción

### 2.3.1 Definición:

Las reglas de dedución lógicas son las siguientes:

I) Modus Ponens (M.P.):

$$\frac{\begin{array}{l}\xi_1 \rightarrow \xi_2 \\ \xi_1\end{array}}{\xi_2}$$

Si en caso de poseer $\xi_1$ variables críticas se verifica:

1) Si $\xi_1 \, \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ y $\xi_2 \, \varepsilon(E_{j+1} - E_j)$ entonces sea $h \geqq j$
2) Ninguna variable crítica en $\xi_1$ sea al mismo tiempo libre y no crítica en $\xi_2$

II) Modus Ponens Forte (M.P.F.):

$$\frac{\begin{array}{l}\xi_1 \rightarrow \xi_2 \\ \xi_1\end{array}}{\xi_2}$$

III) Generalización:

a) $$\frac{\xi_1}{\Lambda x \xi_1}$$ b) $$\frac{\xi_1}{\Lambda \alpha \xi_1}$$

IV) Corroboración:

a) Directa b) Inversa

$$\frac{\xi_1}{V(\xi_1)} \qquad \frac{V(\xi_1)}{\xi_1}$$

Llamamos a estas reglas, las reglas lógicas, porque en algún caso podríamos estar interesados en introducir alguna otra regla; por ejemplo si estamos trabajando con un preidcado cuyo significado se pretende que sea "ser teorema del propio sistema", entonces puede ser muy cómodo el tener una regla del tipo:

$$\frac{T(\xi)}{\xi}$$ o a la inversa $$\frac{\xi}{T(\xi)}$$

Es decir que si "meta-teoricamente" se ha mostrado que una expresión debe ser teorema entonces poder acto seguido afirmarla y viceversa. Naturalmente esta regla no tiene mucho sentido fuera de esta interpretación para T.

Los siguientes lemas son fáciles de demostrar aunque alguno sea un poco más largo. En cualquier caso su demostración no añade nada al contenido del lema, por lo que se dejan para el apéndice. Estos lemas simplemente expresan las propiedades de las anteriores reglas de deducción.

Lema 2.3.2:

Si en el Modus Ponens $\xi_1$ y $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ son verdaderas, entonces la conclusión $\xi_2$ es verdadera.

Lema 2.3.3:

Si en el Modus Ponens Forte $\xi_1$ y $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ son auténticas, entonces la conclusión $\xi_2$ es auténtica.

Lema 2.3.4:

Si $\xi_1$ es verdadera [auténtica] entonces la aplicación de la regla de generalización en cualquiera de las dos versiones da lugar a otra expresión verdadera [auténtica].

Lema 2.3.5:

Si $\xi$ es verdadera, entonces la aplicación de la regla de corroboración directa da lugar a una expresión auténtica y viceversa si $V(\xi)$ es auténtica la aplicación de la regla de corroboración inversa da lugar a una expresión verdadera.

Para nosotros un sistema vendrá dado por un conjunto de axiomas A, un conjunto de axiomas B y asimismo un conjunto de reglas A y un conjunto de reglas B. Normalmente deben ser los axiomas A subconjunto de los axiomas B, ya que toda la expresión auténtica es verdadera; por otra parte el significado de las reglas A debe ser el de garantizar la autenticidad de las conclusiones si se parte de premisas auténticas, mientras que el de las reglas B el de garantizar la veracidad. Pasemos pues a definir el sistema básico $S_b$ y a continuación a definir las argumentaciones válidas:

2.3.6 Definición

El sistema básico $S_b$ es aquel que contiene como axiomas A todas las instancias de los esquemas axiomáticos A.1 - A.11 salvo las excepciones de A.5 II mencionadas en el teorema 2.2.2. Como axiomas B contiene todas las susodichas instancias sin excepciones.

Las reglas A son Modus Ponens Forte, generalización y corroboración directa; mientras que las reglas B son Modus Pones, generalización y corroboración, tanto directa como inversa.

Ahora debemos de definir lo que entendemos por demostraciones de veracidad y demostraciones de autenticidad; el problema que hace algo mas larga la definición es la inbricación entre ambos tipos de demostraciones, pues una demostración de autenticidad también lo es de veracidad; además si demostramos que una expresión sin variables críticas es verdadera entonces también es auténtica (Lema 2.1.3). Por lo que ejemplo puede ser válido el utilizar reglas B en alguna parte de una demostración de autenticidad y a la inversa. Así pues la definición mas adecuada resulta ser la siguiente:

2.3.7 Definición

1. Toda sucesión finita de expresiones, tal que cada expresión es un axioma A o bien se deduce de las expresiones anteriores por aplicación de reglas A, es una demostración de autenticidad.

2. Toda demostración de autenticidad es una demostración de veracidad.

3. Toda sucesión finita de expresiones tal que cada expresión es un axioma B o bien se deduce de las anteriores por aplicación de reglas B, es una demostración de veracidad.

(Naturalmente, de la última expresión de la sucesión se dice que es la expresión demostrada, o que se trata de la demostración de dicha expresión).

4. Toda demostración de veracidad de una expresión sin variables críticas es una demostración de autenticidad de dicha expresión.

5. Si un conjunto finito de sucesiones finitas de expresiones:

$$
\begin{array}{l}
1)\ \xi_{1,1};\ \xi_{1,2};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \xi_{1,n_1} \\
2)\ \xi_{2,1};\ \xi_{2,2};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \xi_{2,n_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m)\ \xi_{m,1};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \xi_{m,n_m}
\end{array}
$$

Cumple las condiciones siguientes:

a) Cada expresión de la m-esima sucesión, o bien es una de las expresiones $\xi_{1,n_1}$; ......; $\xi_{m-1,n_{m-1}}$, o bien es una axioma A, o bien se deduce de dos anteriores de dicha m-esima sucesión por medio de reglas A.

b) Cada una de las sucesiones 1, 2,......, m-1-esima es a su vez una demostración de autenticidad de las respectivas expresiones:

$$\xi_{1,n_1};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \xi_{m-1,n_{m-1}}$$

Entonces la concatenación de dichas sucesiones es a su vez una demostración de autenticidad de la expresión $\xi_{m,n_m}$.

6. Si un conjunto finito de sucesiones finitas de expresiones, como el visto anteriormente cumple las

condiciones:

a) Cada expresión de la m-esima sucesión o bien es una de las expresiones $\xi_{1,n_1}; \ldots; \xi_{m-1,n_{m-1}}$ o bien es un axioma B, o se deduce de expresiones anteriores en dicha m-esima sucesión por aplicación de reglas B.

b) Cada una de las sucesiones 1, 2,...., m-1-esima es a su vez una demostración de veracidad de las respectivas expresiones:

$\xi_{1,n_1}; \ldots; \xi_{m-1,n_{m-1}}$.

Entonces la concatenación de dichas sucesiones es a su vez una demostración de veracidad de la expresión $\xi_{m,n_m}$.

Ello completa la definición inductiva de las demostraciones de autenticidad y veracidad; naturalmente, llamaremos teorema A a toda expresión que posea una demostración de autenticidad y teorema B a toda aquella que la posea de veracidad. Por el apartado 2. de la definición inductiva es evidente que todo teorema A es teorema B.

El siguiente resultado indica sencillamente que la definición de demostraciones está bien dada; hemos preferido formularlo sin especificar exactamente cuales pudieran ser los axiomas y las reglas de deducción con vistas a la posible aplicación del teorema a otro sistemas mas específicos que no solamente el sistema básico.

2.3.8 Teorema:

Si en una interpretación dada se verifica que:

1º) Todos los axiomas A de un sistema S son autenticos.
2º) Todos sus axiomas B son verdaderos.
3º) Las reglas A conservan la autenticidad y las B la veracidad.

Entonces en dicha interpretación todos los teoremas A son auténticos y los B verdaderos.

Por "conservar la autenticidad" naturalmente entendemos que si se parte de expresiones auténticas se obtienen también expresiones auténticas, y analogamente respecto a la veracidad.

Este teorema es practicamente evidente dada la definición de demostración que hemos dado, pero de todas formas si el lector lo desea es fácil dar una demostración inductiva del mismo. Com corolario dados los lemas 2.3.2. - 2.3.5. obtenemos:

2.3.9 Corolario.

Todos los teoremas A del sistema básico $S_b$ son auténticos y todos los teoremas B son verdaderos en cualquier interpretación.

Dado que una expresión y su negación no pueden ser al mismo tiempo verdaderas (nota 1.3.20) no puede haber ninguna expresión tal que ella y su negación sean al mismo tiempo teoremas de $S_b$ luego:

2.3.10 Corolario.

El sistema básico es consistente. Otro resultado sencillo es el siguiente:

2.3.11 Teorema.

Para cualquier sistema que contenga las reglas de corroboración directa e inversa (la primera como regla A y B y la segunda como regla B) se verifica que una expresión dada $\xi$ es teorema ssi lo es la expresión $V(\xi)$.

El teorema es evidente ya que la regla de corroboración directa tanto si es $\xi$ teorema B como teorema A nos permite obtener $V(\xi)$ a partir de $\xi$; mientras que la de corroboración inversa nos obtendrá $\xi$ a partir de $V(\xi)$. Ello significa que al menos estos sistemas tienen la bonita propiedad de que demostrar que algo es verdadero es totalmente equivalente a demostrar ese algo. Cosa que no ocurría, por ejemplo, con el sistema de Perlis [Per 85]. Así pues algo hemos ganado.

## 2.4 El teorema de deducción.

Por extensión axiomática de un sistema dado vamos a entender otro sistema que contiene exactamente las mismas reglas de deducción, pero posiblemente algunos axiomas adicionales. Por otra parte, solo vamos a considerar extensiones axiomáticas obtenidas añadiendo expresiones sin variables libres (cerradas). Así pues los nuevos axiomas serán en cualquier caso tanto teoremas A como teoremas B; por ello en muchas ocasiones no nos molestaremos siquiera en especificar si se añaden como axiomas A o como axiomas B. Además, dado que el teorema de deducción solo admite una formulación elegante en el caso de no haber variables libres, en general consideraremos la deducción a partir de premisas unicamente si estas son expresiones cerradas.

2.4.1 Definición.

Una deducción en el sistema S de la expresión $\xi$ a partir de las premisas $\xi_1, \xi_2,\ldots\ldots,\xi_n$ es una demostración de $\xi$ en la extensión axiomática de S obtenida al añadir como axiomas a S las expresiones (cerradas) $\xi_1, \xi_2,\ldots\ldots,\xi_n$.

Naturalmente si se trata en la extensión axiomática de una demostración de autenticidad hablaremos de deducción de autenticidad y analogamente para la veracidad. Simbolicamente:

$$\xi_1, \xi_2,\ldots.,\xi_n \;\; \overset{A}{\underset{S}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi$$

Significa lo mismo que escribir que $\xi$ es teorema en el sistema S' extendido:

$$\overset{A}{\underset{S'}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi$$

2.4.2 Teorema.

Sea S una extensión axiomática de $S_b$ y sea $\xi_c$ una expresión sin variables libres; entonces:

$$\xi_c \;\; \overset{A}{\underset{S}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi \qquad \text{ssi} \qquad \overset{A}{\underset{S}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi_c \rightarrow \xi$$

$$\xi_c \;\; \overset{B}{\underset{S}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi \qquad \text{ssi} \qquad \overset{B}{\underset{S}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}} \;\; \xi_c \rightarrow V(\xi)$$

Una parte del teorema es más sencilla de demostrar que la otra: si $\xi_c \rightarrow \xi$ es teorema A de S entonces, siendo $\xi_c$ teorema A, como ya se ha hecho notar antes, en el sistema extendido, aplicando Modus Ponens $\xi$ será teorema A en dicho sistema.

De la misma forma si $\xi_c \rightarrow V(\xi)$ es teorema B de S, de hecho también es teorema A pues carece de variables libres; aplicando M.P. obtenemos $V(\xi)$ como teorema A y por lo tanto B de la extensión y por la regla de corroboración inversa $\xi$ es teorema B de la extensión.

Así pues, queda unicamente por demostrar lo que propiamente constituye el teorema. Dicha (meta-) demostración se encuentra en el apéndice, dado que la idea de la misma es muy conocida: se basa simplemente en un proceso de inducción sobre la longitud de las demostraciones en la extensión de S.

Con el teorema de deducción en la mano se pueden sacar algunas consecuencias. Así pues lo vamos a utilizar. Naturalmente, entendemos por sistema inconsistente aquel en el cual son deducibles una expresión $\xi$ y su negación $\neg\xi$. Necesitamos primeramente algunos lemas auxiliares.

2.4.3 Lema:

Todas las tautologías del cálculo de proposiciones son teoremas A (y por lo tanto B) del sistema básico.

Este lema es evidente dado que A.1, A.2 y A.3 son axiomas A de $S_b$ y que el M.P.F. es una regla A de $S_b$.

2.4.4 Lema:

Si S es una extensión inconsistente de $S_b$, entonces son derivables en él todas las expresiones.

En efecto, sea $\xi$ la expresión tal que $\xi$ y $\neg\xi$ son teoremas B de S. Sea $\xi_1$ una expresión perteneciente a $E_1$ y sin variables libres. Veamos que tanto $\xi_1$ como $\neg\xi_1$ son teoremas de S:

1. $\xi$ ;hipótesis
2. $\neg\xi$ ;hipótesis
3. $\xi \to (\neg\xi \to \xi_1)$;Tautología cálculo de proposiciones
4. $\neg\xi \to \xi_1$; M.P. 1,3.
5. $\xi_1$ ;M.P. 2,4.

La cuarta expresión se puede deducir de 1,3 dado que $\neg\xi \to \xi_1$ es del mismo grado y contiene las mismas variables críticas que $\xi$. La quinta se puede deducir de la segunda y la cuarta dado que $\xi_1$ es de grado menor o igual que $\xi$ y además carece de variables libres.

Analogamente substituyendo $\xi_1$ por $\neg\xi_1$ se demuestra que $\neg\xi_1$ es teorema.

Consideremos ahora una expresión $\xi'$ cualquiera. Téngase en cuenta que tanto $\xi_1$ como $\neg\xi_1$ son teoremas A al carecer $\xi_1$ de variables libres; así pues podemos hacer lo siguiente:

1. $\xi_1$
2. $\neg\xi_1$
3. $\xi_1 \to (\neg\xi_1 \to \xi')$; Cálculo de proposiciones.
4. $\neg\xi_1 \to \xi'$; M.P.F. 1,3.
5. $\xi'$; M.P.F. 2,4.

Es decir cualquier expresión será teorema A (y por lo tanto también B).

2.4.5 Corolario.

Si a una extensión consistente de $S_b$ añadimos como axioma una expresión $\xi$ sin variables libres cuya negación no sea teorema de S, entonces el nuevo sistema obtenido es consistente.

Sea S la extensión consistente de $S_b$; supongamos que al añadir $\xi$ como axioma, el nuevo sistema no fuese consistente. Entonces $\neg\xi$ sería teorema A de la extensión (como hemos visto en el lema anterior todas las expresiones son teoremas A). En cuyo caso, por el teorema de deducción se tendría:

$$\overset{A}{\underset{S}{\vdash\!\!\!\!\longrightarrow}} \xi \rightarrow \neg\xi$$

Pero $(\xi \rightarrow \neg\xi) \rightarrow \neg\xi$ es un teorema del cálculo de proposiciones, por lo tanto es teorema A de $S_b$ y de cualquier extensión suya. Así pues, por M.P.F. $\neg\xi$ será teorema A de S contrariamente a hipótesis, lo cual demuestra el corolario.

2.4.6 Definición.

Un sistema S es completo ssi dada una expresión cerrada $\xi_c$ cualquiera, entonces o bien $\xi_c$ o bien $\neg\xi_c$ es teorema de S.

(Naturalmente, esta es la definición clásica y nada nuevo hemos inventado).

2.4.7 Teorema.

Todo sistema consistente tiene una extensión consistente y completa.

En efecto, consideremos una lista de todas las expresiones cerradas: $\xi_1$, $\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$; vamos a definir además una serie de sistemas $S_0$, $S_1,\ldots,S_n$, todos ellos consistentes:

$S_0$ será el sistema original (consistente por hipótesis).

$S_{n+1}$ será el sistem obtenido añadiendo a $S_n$ la expresión $\xi_{n+1}$ en caso de que $\neg\xi_{n+1}$ no sea teorema de $S_n$, en caso contrario será igual a $S_n$.

Es evidente que todos los $S_n$ son consistentes, ya que $S_0$ lo es y debido al corolario 2.4.5. si $S_n$ es consistente $S_{n+1}$ también lo es.

Por último formamos una sistema $S_L$ añadiendo a $S_0$ todas las expresiones que sean axioma de alguno de los sistemas $S_n$. $S_L$ es el sistema buscador, ya que:

1º) $S_L$ es consistente; en efecto, si no lo fuese existiría una expresión $\xi$ tal que $\xi$ y $\neg\xi$ fuesen demostrables en $S_L$; pero las demostraciones de $\xi$ y $\neg\xi$ tendrían un número finito de pasos, por lo que utilizarían a lo sumo un número finito de axiomas, por lo tanto habrá algún m tal que $S_m$ contenga todos esos axiomas. Las demostraciones de $\xi$ y $\neg\xi$ serían repetibles en $S_m$ y este sería inconsistente contrariamente a lo antes demostrado.

2º) $S_L$ es completo; en efecto, dada una expresión cerrada, esto tarde o temprano aparecerá en la lista de todas las expresiones cerradas; supongamos que aparece como la KH-esima; entonces o bien pasa a ser axioma de $S_{KH}$ o bien su negación es teorema de $S_K$. En el primer caso es axioma de $S_L$ y en el segundo, su negación será teorema de $S_L$, por contener $S_L$ todos los axiomas de $S_K$.

Lo cual demuestra el corolario. Estos resultados muestran que estos sistemas son relativamente razonables, sin embargo el paso siguiente, que sería demostrar los teoremas de compacidad y completitud, no hemos sido capaces de darlo.

El teorema de compacidad lo que establecería sería que si hay un conjunto infinito de expresiones que no es satisfacible, entonces necesariamente habría un subconjunto finito suyo no satisfacible.

Ahora bien, con la semántica que hemos dado este teorema es sencillamente falso. Considerese el siguiente conjunto infinito de expresiones: sean $c_1$, $c_2,\ldots,c_n,\ldots\ldots$ el conjunto de todos los nombres individuales; entonces $\{A(c_1)$, $A(c_2,\ldots,$ $A(c_n),\ldots;$ $\neg\Lambda xA(x)\}$ es un conjunto insatisfacible: es imposible que para todos los elementos se verifique la propiedad A y al mismo tiempo que haya alguno para el cual no se verifique dicha propiedad. Sin embargo ningún subconjunto finito es insatisfacible: en principio cualquier combinación de elementos que cumplen la propiedad $\bar{A}$ y de elementos que no la cumplen es posible.

Dado que el teorema de compacidad se obtiene en lógica clásica normalmente como consecuencia del de completitud probablemente no sea posible obtener en nuestro caso un teorema de completitud; es decir que no sea posible demostrar que todas las expresiones logicamente verdades son obtenibles a partir del conjunto de axiomas y reglas de deducción que hemos dado. De hecho la siguiente versión de dicho teorema [Boolos 74, cap. 12] falla en nuestro caso:

Si un conjunto de expresiones es insatisfacible, entonces existe una refutación del mismo.

El conjunto que vimos anteriormente $\{A(c_1),\ldots,A(c_n),\ldots;$ $\neg\Lambda xA(x)\}$ es insatisfacible pero con ningún número finito de pasos es posible llegar a una contradicción.

Sin embargo esta versión del teorema de completitud es muy fuerte; aun cuando el sistema fuese precisamente una extensión consistente y completa del sistema básico (que según 2.4.7. tiene que existir) dicha versión seguiría fallando. Así pues, lo interesante sería saber si existe alguna axiomatización recursiva o recursivamente enumerable de estos sistemas de forma que el conjunto de teoremas sea el de expresiones logicamente verdaderas (L.V.).

No lo hemos demostrado, pero imaginamos que no exista; y ello entre otras razones porque no es tarea sencilla el determinar si ciertas expresiones relativamente simples son logicamente verdaderas o no. Por ejemplo: ¿lo es la siguiente expresión?:

$$\neg \Lambda\alpha \ (V(\alpha) \leftrightarrow A(\alpha))$$

Uno podría estar tentado a contestar rapidamente que no; dado que la forma de esta expresión no recuerda en absoluto a ninguna tautología del cálculo de predicados. Pero decir que no lo es, significa decir que hay interpretaciones en las cuales la expresión:

$$\Lambda\alpha \ (V(\alpha) \leftrightarrow A(\alpha))$$

es verdadera, o lo que es lo mismo que $A(\alpha)$ constituye un predicado de verdad para $E_1$, dado que la expresión anterior se refiere solo a expresiones de $E_1$, y que afirma que en dicho dominio el predicado $\bar{V}$ y el predicado $\bar{A}$ son equivalentes. Pero $A(\alpha)$ pertenece a $E_1$; es decir, a fin de cuentas lo que tenemos es un sublenguaje que contiene su propio predicado de verdadero, sin ninguno de los "trucos" utilizados para prevenir los círculos viciosos. Si esto es en algún caso posible sin caer en contradicción es algo de lo que no estamos seguros, pero en cualquier caso el punto importante es que no parece ser algo que se pueda determinar de forma mecánica. Así pues hay razones para pensar que no podemos dar una axiomatización completa de estos sistemas. Tampoco es que ello nos preocupe en exceso; la aritmética tampoco es axiomatizable (recursivamente, se sobreentiende) y ello no nos impide demostrar teoremas acerca de ella.

## 2.5 Algunas cuestiones abiertas

En el apartado 1.4.3. ya vimos la facilidad con la que se obtiene una variante del primer teorema de incompletitud de Gödel; por ello es interesante el preguntarse si se podría conseguir el segundo; naturalmente para ello hemos de disponer de algún predicado de demostrabilidad (de hecho necesitamos dos: uno que exprese la propiedad de ser teorema A y otro la de ser teorema B). El camino para conseguir dichos predicados no es en nuestro caso aritmetizar, sino directamente axiomatizar la relación "ser teorema"; concretamente vamos a considerar la siguiente extensión axiomática $S_G$ del sistema básico $S_b$:

2.5.1 Definición.

Axiomas de $S_G$: Se definen por inducción.

I) paso base; $S_G$ contiene:

1º) Todos los axiomas de $S_B$ (como axioamas A aquellos que son A en $S_b$ y como axiomas B aquellos que son B en $S_b$).

2º) Todas las expresiones de las siguientes formas (tanto como axiomas A como axiomas B):

a) $TA(\xi) \rightarrow TB(\xi)$

$TB(\xi) \rightarrow TA(\xi)$; si $\xi$ es una expresión sin variables críticas.

b) $TA(\xi) \rightarrow TA(\Lambda x\xi)$

$TA(\xi) \rightarrow TA(\Lambda \alpha\xi)$

$TB(\xi) \rightarrow TB(\Lambda x\xi)$

$TB(\xi) \rightarrow TB(\Lambda\alpha\xi)$

c) $TA(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow [TA(\xi_1) \rightarrow TA(\xi_2)]$

d) $TB(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow [TB(\xi_1) \rightarrow TB(\xi_2)]$ si en caso de que $\xi_1$ contenga variables críticas se verifica que:

- Si $\xi_1 \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ y $\xi_2 \varepsilon(E_{j+1} - E_j)$ entonces $n \geq j$.

- Ninguna variable crítica en $\xi_1$ en libre y no crítica en $\xi_2$.

e) $TB(\xi_1) \rightarrow TA(V(\xi_1))$

$TA(V(\xi_1)) \rightarrow TB(\xi_1)$

f) $TA(\xi_1) \rightarrow TA(TA(\xi_1))$

$TA(\xi_1) \rightarrow TB(TB(\xi_1))$

II) Paso de inducción: Sean $\xi_1$ y $\xi_2$ axiomas A y B de $S_G$ respectivamente; entonces tambien son axiomas A $TA(\xi_1)$ y $TB(\xi_2)$.

Dado que ya hemos dicho que $S_G$ va a ser un extensión axiomática, queda claro que las reglas de deducción de $S_G$ son las de $S_B$ y por tanto está perfectamente definido el sistema. El siguiente lema es pesado de demostrar pero sencillo; por ello lo dejamos para el apéndice.

2.5.2 Lema.

Si $\xi_1$ es teorema A de $S_G$, entonces también es teorema A (y B) $TA(\xi_1)$. Analogamente si $\xi_2$ es teorema B de $S_G$, entonces también es teorema B(y A) $TB(\xi_2)$.

La demostración se realiza por inducción sobre la longitud de las demostraciones en $S_G$. El paso base está garantizado precisamente por el paso de inducción de la definición: si $\xi$ es axioma A entonces $TA(\xi)$ es axioma también. El paso de inducción en la demostración lo garantiza el hecho de que hemos axiomatizado las propiedades de la deducción y dada una demostración de $\xi$ solo hay que "repetirla" pero con TA o TB delante donde corresponda.

2.5.3. Definición.

$I_G$ será cualquier interpretación en la cual $\overline{\overline{TA}}(\xi)$ se verifique ssi $\xi$ es teorema A de $S_G$ y analogamente $\overline{\overline{TB}}(\xi)$ se verifique ssi $\xi$ es teorema B de $S_G$.

2.5.4. Lema.

Todos los axiomas A de $S_G$ son auténticos y todos sus axiomas B verdaderos en una interpretación $I_G$.

Una vez visto el lema anterior, este lema es evidente, dado que en primer lugar en el paso base los axiomas provinientes de $S_B$ son auténticos (los A) y verdaderos (los B) en todas las interpretaciones; mientras que los apartados I.2.a. a I.2.e. lo que hacen no es mas que expresar las propiedades de nuestra definición de ser teorema; por ejemplo si $\xi$ es teorema A, también lo es $\Lambda x\xi$ o $\Lambda\alpha\xi$ cualesquiera que sean x o $\alpha$. El apartado I.2.f. es el problemático; por ello tuvimos primero que demostrar que si $\xi$ era teorema A también lo era $TA(\xi)$ y que si es teorema B $\xi$ también lo es $TB(\xi)$. Por dicho motivo ambas expresiones de I.2.f. son verdaderas (y auténticas, al carecer de variables libres).

El paso de inducción solo introduce axiomas de la forma

$TA(\xi_2)$ o $TB(\xi_2)$ si $\xi_2$ es axioma A o $\xi_2$ es axioma B y por lo tanto siempre introduce axiomas verdaderos.

2.5.5. Corolario.

Todos los teoremas A de $S_G$ son auténticos en $I_G$ y todos los B verdaderos en una interpretación $I_G$.

Ello es evidente en base al teorema 2.3.8.

2.5.6. Corolario.

El sistema $S_G$ es consistente.

Evidente en base al corolario anterior. Obsérvese que juntando el corolario 2.5.5. y el lema 2.5.2. obtenemos.

2.5.7. Corolario.

Una expresión $\xi$ es teorema A de $S_G$ ssi es teorema de $S_G$ $TA(\xi)$ analogamente para el caso de ser teorema B. Es decir:

$$\overset{A}{\underset{S_G}{\vdash}} \xi \quad \text{ssi} \quad \overset{A}{\underset{S_G}{\vdash}} TA(\xi)$$

$$\overset{B}{\underset{S_G}{\vdash}} \xi \quad \text{ssi} \quad \overset{B}{\underset{S_G}{\vdash}} TB(\xi)$$

Ademas para todas las expresiones se tiene por I.2.f. que:

$TA(\xi) \rightarrow TA(TA(\xi))$

$TB(\xi) \rightarrow TB(TB(\xi))$

Por otra parte también tenemos las leyes del Modus Ponens:

$$TA(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow [TA(\xi_1) \rightarrow TA(\xi_2)]$$

y

$TB(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow [TB(\xi_1) \rightarrow TB(\xi_2)]$ con los condicionantes conocidos.

Estas (o sus análogas) son las tres condiciones normalmente aceptadas para considerar a un predicado como predicado de demostrabilidad y que por ejemplo en aritmética bastan para deducir el segundo teorema de incompletitud de Gödel (véase [Boolos 74, cap. 6]). Pero no estamos en la aritmética; así pues el problema que se plantea es si dicho segundo teorema es o no válido para estos sistemas. No lo hemos logrado resolver, pero por lo menos podemos dejar un poco más avanzada la cuestión. Por comodidad de escritura vamos a llamar $\Phi$ a la expresión:

$$\wedge\alpha\ [TB(\alpha) \rightarrow \neg TB(\neg\ \alpha)]$$

La cual intenta expresar que el sistema es consistente, dado que dice que si algo es teorema no lo es su negación. Obsérvese que esta expresión es verdadera en virtud del corolario 2.5.6. Luego si añadimos $\Phi$ como axioma y no variamos de interpretación $I_G$ obtendremos un nuevo sistema $S_{G1}$ consistente ya que todos sus axiomas serán verdaderos (los B) y auténticos (los A) en $I_G$. Así pues $S_{G1} = S_{G+\Phi}$ es consistente; pero para $S_{G1}$ no tenemos un predicado de demostrabilidad, lo tenemos para $S_G$. La situación para $S_{G1}$ es muy especial; si la expresión $TB(\Phi)$ fuese teorema luego los axiomas $TB(\xi) \rightarrow TB(TB(\xi))$, $TA(\xi) \rightarrow TA(TA(\xi))$ y $TB(\xi) \rightarrow TA(\xi)$ (cuando $\xi$ carece de variables libres como es el caso), nos permitirán recuperar la condición:

$$\underset{S_{G1}}{\overset{A}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}}\ \xi \quad \text{ssi} \quad \underset{S_{G1}}{\overset{A}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}}\ TA(\xi)$$

$$\overset{B}{\underset{S_{G1}}{\vdash}} \xi \quad \text{ssi} \quad \overset{B}{\underset{S_{G2}}{\vdash}} TB(\xi)$$

Pero no podemos garantizar que lo sea; sin embargo lo podemos añadir como axioma; obteniendo un sistema $S_{G2} = S_{G1} + TB(\Phi) = S_G + \Phi + TB(\Phi)$. Dicho sistema cumpliría como es fácil de comprobar las tres condiciones para que se pudiesen aceptar a TB y TA como predicados de demostrabilidad y además en él sería demostrable su propia consistencia; solo que ahora no sabemos si es consistente o no; si no lo es ello solo puede ser debido a que $\neg TB(\Phi)$ es teorema de $S_{G1}$ ya que en caso contrario el corolario 2.4.5. al teorema de deducción nos garantizaría su consistencia. Por último, si $\neg TB(\Phi)$ es teorema de $S_{G1}$ ello solo puede ser debido a que es teorema de $S_G$ la expresión:

$$\Phi \rightarrow \neg TB(\Phi)$$

Lo cual indica bien claramente que ocurre; obsérvese que $\Phi$ sería basicamente un punto fijo del predicado $\neg TB$. Si dispusiésemos de las funciones recursivas dentro del sistema y pudiésemos diagonalizar, con toda seguridad que obtendríamos tras mas o menos trabajo el segundo teorema de incompletitud. Pero hemos obtenido los predicados de demostrabilidad sin el auxilio de dichas funciones; obsérvese que por lo demás nuestros sistemas son bastantes débiles, de hecho ni siquiera contienen los axiomas de la igualdad; así pues queda la duda de si será $\Phi \rightarrow \neg TB(\Phi)$ teorema o no de $S_G$; es decir si $S_{G2}$ será o no consistente. Hay hechos que nos permiten abrigar alguna esperanza:

2.5.4. Lema.

En $S_G$ no es posible obtener como teorema ninguna expresión de la forma $\neg TB(\xi)$.

Este lema es fácil de comprender: TB y TA pueden ser interpretados en $S_G$ de la siguiente forma: $TB(\xi)$ y $TA(\xi)$ se verifica ssi $\xi$ es una expresión; en cuyo caso es fácil ver que todos los axiomas de $S_G$ son verdaderos y que por lo tanto no se puede obtener ninguna conclusión falsa en esta interpretación; es decir no se puede obtener $\neg TB(\xi)$ para ningún $\xi$. Ello muestra que en $S_{G1}$ hay que hacer uso esencial de $\Phi$; pero como esta expresión es:

$$\Lambda\alpha[TB(\alpha) \rightarrow \neg TB(\neg\alpha)]$$

Parece indicar que solo se puede obtener $\neg TB(\xi)$ si es posible obtener $TB(\neg\xi)$ primero; pero en $S_{G1}$ no es posible obtener $TB(\neg\Phi)$ puesto que esta expresión es falsa en $I_G$ y los teoremas de $S_{G1}$ son verdadero en $I_G$. Así pues parecería que no es posible obtener en $S_{G1}$ la expresión $\neg TB(\Phi)$. Sin embargo ello es solo conjetura, porque por otra parte $\neg TB(\Phi)$ es cierta en $I_G$ ($\Phi$ es falsa si se interpreta $TB(\xi)$ como "$\xi$ es una expresión" y por lo tanto no puede ser teorema de $S_G$ ya que este admite esa interpretación).

La situación de hecho la hace aún mas dudosa el siguiente lema.

2.5.5. Lema.

Para toda expresión $\xi(\alpha)$ con una variable gramatical libre y perteneciente a $E_1$ es posible hallar expresiones $\Sigma$ y $\Sigma'$ tales que:

a) $\vdash_{S_B} \Sigma \rightarrow \xi(\Sigma)$

b) $\vdash_{S_B} \xi(\Sigma') \rightarrow \Sigma'$

ejemplos:

a) $\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\Lambda\alpha\xi(\alpha))$

b) $\xi(\neg \Lambda\alpha \neg\xi(\alpha)) \rightarrow \neg \Lambda\alpha \neg\xi(\alpha)$

## 3. Aplicaciones a la programación lógica y a la representación del conocimiento

En el momento actual las aplicaciones de los sistemas expertos se basan, en su mayoría, en el paradigma "concepto - atributo - valor" que, aunque tiene un campo de aplicación importante en representación de problemas, tiene limitaciones notables, ya que en el se trata realmente de razonar sobre clasificaciones de conceptos.

Para la segunda generación de sistemas expertos es preciso poner a punto, en forma operativa, nuevos modos de representación que amplíen el area de problemas atacables por este tipo de sistemas. Las lógicas que proponemos pueden constituir un vehículo adecuado para estos fines.

En el presente apartado se plantean las posibilidades de estas lógicas, tanto para representación del conocimiento, como para dar origen a sistemas de programación lógica a través de su interpretación mediante procesos de decisión

### 3.1 Problemas de representación del conocimiento.

La idea básica de esta tesis es desarrollar las posibilidades que ofrece el considerar un universo formado, no sólo por los individuos o elementos sobre los que versa el discurso sino también, por las propias expresiones del lenguaje. Una de las motivaciones para ello es la existencia del discurso indirecto, es decir, de los predicados intensionales: "pienso","creo","digo",etc; los cuales interpretamos al fin y al cabo como predicados de las expresiones a las que se refieren; estos predicados también pueden englobar conceptos modales tales como "necesario" o "posible" pues se puede considerar que son propiedades de las expresiones:una proposición es necesaria o no lo es.

Naturalmente, existe otro enfoque muy conocido como es el de codificar las expresiones del lenguaje a través de los elementos individuales, y luego interpretar las propiedades que se asignen a los elementos como propiedades de las expresiones codificadas. Sin embargo, aunque este método es muy popular entre los matemáticos, se le pueden plantear varios problemas:

1. ¿Qué ocurre si el dominio de individuos es finito y no poseemos por tanto suficientes elementos para codificar todas las expresiones, que son infinitas?

2. ¿Cómo se expresaría que el elemento considerado y la expresión son dos cosas completamente distintas? ( recuérdese que sólo disponemos del código para referirnos a la expresión ).

Estas dos cuestiones son quizás un tanto anecdóticas, sin embargo, existe algún otro inconveniente serio:

3. Para poder utilizar los códigos para referirse a las expresiones uno necesita desarrollar dentro de la teoría una serie de mecanismos, si ha de demostrar que una determinada fórmula efectivamente expresa bien determinada propiedad de las expresiones; y ello ya es algo más comprometido; normalmente supone tener ya un sistema axiomático y unas reglas de evaluación semántica de las expresiones, por lo cual no podemos alterarlas a nuestra conveniencia, que es al fin y al cabo lo que nosotros (y otra gente) hemos hecho para tratar por ejemplo el predicado "verdadero".

En los dos capítulos precedentes hemos aprovechado la idea de un dominio de individuos y expresiones para desarrollar la axiomática y la semántica de precisamente dicho predicado. El sistema $S_B$ postulado tiene algunas caracteristicas agradables: es fácil expresar ciertas propiedades del concepto de verdad; por otra parte admite un teorema de deducción y en definitiva no se separa en exceso de la lógica clásica (es una lógica bivalente). Además, precisamente muestra cómo se puede colapsar la jerarquía tarskiana de lenguaje objeto, meta-lenguaje,etc; en un sólo lenguaje con niveles implícitos, es decir, que no hay que recurrir a infinitos lenguajes distintos para hablar del concepto de verdad.

Sin embargo, hay algo que no es satisfactorio, pues no hemos podido dar un procedimiento de semidecisión (bien porque éste no exista o porque no hayamos sido capaces de generarlo); por lo que, si bien es cierto que los resultados obtenidos tienen un interés teórico, no es menos cierto que desde un punto de vista práctico nos interesan métodos que permitan basar en ellos intérpretes y, por tanto, soporten lenguajes de programación.

Por otra parte, todavía nos quedan problemas pendientes; para ponerlos de manifiesto, consideremos un ejemplo de Mc Carthy [Mc Car. 77]:

> Supongamos que hay dos cajas fuertes, siendo la combinación de ambas 45-25-17, y que Pat conoce que, efectivamente, la combinación de la primera es dicho número, pero que ignora que la combinación de la segunda es también dicho número.

Esto se puede expresar en los lenguajes en los que estamos trabajando de la forma:

(1) Sabe [ Pat ; Combinación ( Caja1 ) = 45-25-17 ]

Siendo Sabe $(x,\alpha)$ la expresión que indica que el individuo x conoce el hecho representado por $\alpha$. La expreasión anterior junto con las siguientes simbolizarían la situación:

(2) $\neg$Sabe [ Pat ; Combinación ( Caja1 ) = 45-25-17 ]

(3) Combinación ( Caja1 ) = 45-25-17

(4) Combinación ( Caja2 ) = Combinación ( Caja1 )

"Combinación" es sencillamente una función que asigna a cada caja un número, y a los elementos que no son cajas les puede asignar un elemento arbitrario, como por ejemplo "Noexiste". Ello sería realmente aceptable si no intentásemos expresar más cosas; por ejemplo que Pat no sabe cuál es la combinación de la caja 2. Supongamos que nosotros tampoco la supiésemos; en tal caso, no podríamos simplemente escribir la expresión (2) como significando este hecho, pues ignoramos el número a poner. Lo que desearíamos escribir sería algo como:

$\neg\Lambda x\neg$ [ Combinación ( Caja2 ) = x $\cap$ $\neg$Sabe{ Pat ; Combinación ( Caja2 ) = x } ]

Que significa que existe una combinación de la caja 2 y no sabe Pat cual es; (si se desea se puede añadir la condición $x\xi_3$ Noexiste). Sin embargo esta expresión no es exactamente lo que deseamos, pues la ultima aparición de x es oculta, no estando regida por el cuantificador. Asi pues, deseamos dos cosas:

- Poder dar procedimientos de decisión.
- Cuantificar respecto de variables que poseen apariciones indirectas.

Vamos a mostrar como, dentro de la filosofía de estos lenguajes, ambas cosas son posibles; sin embargo para ello hay que pagar un precio y este es el de simplificar el sistema; es decir el de olvidarnos al menos por ahora del predicado de verdadero; pues este es el que ha planteado mas problemas a la hora de dar demostraciones de completitud, incluso en el caso sencillo de lenguajes sin letras de función. Si por ejemplo se intenta una prueba al estilo Henkin, la dificultad radica en que en algunos puntos de la demostración es preciso razonar que si cierta expresión A(c), donde "c" es una constante arbitaria, que no aparece entre los axiomas propios del sistema en cuestión, entonces tambien es teorema del sistema A(y), pues la variable libre y designa un elemento arbitrario y por generalización también sera teorema $\wedge y A(y)$. Sin embargo en $S_B$ existen axiomas de la forma siguiente:

$\neg V(\neg\xi)\rightarrow V(\xi)$; si $\xi$ carece de variables libres (A.7.II).

$\xi\rightarrow V(\xi)$; si $\xi$ carece de variables libres (A.8.I).

Estos axiomas nos impiden garantizar que la demostración dada para "c" sea repetible para la variable "y"; pues hay expresiones que dejan de ser axiomas si se substituye una por la otra ( al dejar de ser cerradas) y que en principio pueden haber intervenido en la demostración de A(c).

Si se intenta construir una demostracíon al estilo Kleene [Kleene 69] uno se encuentra con problemas similares originados por el predicado de verdadero.

Asi pues, dado que en cualquier problema que intentemos modelizar lo primero que necesitaremos sera un procedimiento de decisión y, ya que hay buenas razones para pensar que es justamente dicho predicado el que nos impide proporcionarlo, vamos a simplificar el sitema prescindiendo de él.

A continuación vamos a dar un repaso a las variaciones que hemos introducido a fin de lograr nuestros objetivos.

3.2. Variaciones

3.2.1. Definición:

El dominio de interpretación estara constituido por la unión de dos conjuntos: el de los nombres individuale y el de las expresiones cerradas .

Naturalmente una interpretación vendra dada por un conjunto de funciones y de relaciones definidas sobre dicho conjunto. La modficación consiste pues en que restringimos el dominio de expresiones a sólo aquellas que son cerradas, se trata de una modificación técnica, cuya justificación radica en que gracias a ella hemos podido llegar fácilmente a determinados teoremas, y en que al fin y al cabo cualquier cosa que se pueda expresar con formulas abiertas también puede ser expresado con formulas cerradas.

Dado que ahora deseamos cuantificar respecto de variables que poseen apariciones "indirectas", deberemos de tomar como libres dichas apariciones indirectas; es decir, debemos de modificar nuestra definición de variable libre:

3.2.2. Definición:

Una aparición de una variable individual en un termino gramatical $\tau$ es libre ssi no se halla bajo el radio de acción de un $\Lambda x$ (ni es la x de un $\Lambda x$).

Una aparición de una variable gramatical $\alpha$ en un termino gramatical $\tau$ es libre ssi se da uno de estos casos:

- No se halla bajo el radio de acción de un $\Lambda\alpha$, ni es desde luego el $\alpha$ de un $\Lambda\alpha$.

- O bien, hallandose bajo dicho radio de acción, si este es $\mu$, es directa en $\mu$.

Este último caso es debido a la forma en como se valoran los términos gramaticales (una aparición directa no esta regida por ningún cuantificador).

3.2.3. Definición:

Una valoración es una función del conjunto de variables en el dominio de interpretación, de forma que a cada variable individual le corresponde un nombre individual y a cada variable gramatical una expresión cerrada.

En cierta forma, para los términos individuales esta definición no es sino una manera distinta de presentar lo mismo, pues en general para un termino individual cualquiera escribiremos v(t) para designar el nombre individual definido inductivamente como en 1.3.5.; sin embargo vamos a necesitar utilizar las valoraciones de otra forma adicional:

3.2.4. Definición:

Designaremos por t/v el termino individual resultante de substituir las variables individuales, presentes directamente en t, por sus valores según la valoración v.

Asi pues, t/v es un término individual cerrado, pero no necesariamente un nombre individual. Análogamente:

3.2.5. Definición:

$\tau/v$ es el término gramatical resultante de substituir todas las variables libres, ya sean individuales o gramaticales, por sus valores según la valoración v.

Hay dos resultados inmediatos:

3.2.6. Lema:

Para todotérmino individual t y valoración v, se verifica: v(t) = v(t/v).

Se demuestra fácilmente por inducción .

3.2.7. Lema:

Para cualquier término gramatical $\tau$ y cualquier valoración v, $\tau/v$ es una expresión cerrada.

En efecto, todas las variables libres son substituidas por terminos cerrados, lo cual efectivamente nos deja sin una sola variable libre y el resultado es claramente una expresión cerrada.

3.2.8. Definición de satisfacción.

La definición es naturalmente por induccion sobre el número de conectivas y/o cuantificadores (que no aparezcan dentro de los argumentos de algún predicado):

Paso base; sea $\xi$ una expresión atómica:

$F_r^{p,q}\ (t_1,\ldots.,t_p;\tau_1,\ldots,\tau_q)$

Una valoración v satisfara esta expresión ssi se verifica:

$\bar{F}_r^{p,q}[v(t_1,\ldots,v(t_p);\tau_1/v,\ldots,\tau_q/v)]$

Paso de inducción:

- v satiface $\neg\xi$ ssi no satiface $\xi$.

- v satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ ssi satisface $\xi_2$ o no satisface $\xi_1$.

- v satisface $\Lambda x\xi_1$ ssi toda valoración v' x-equivalente a ella satisface $\xi_1$.

- v satisface $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a ella satisface $\xi_1$.

Realmente la diferencia se halla en el paso base, el paso de inducción lo hemos escrito para que figurase la definición completa.

Además, nos van a ser útiles las siguientes definiciones:

3.2.9. Definición:

El radio de acción de una letra de predicado es el conjunto de sus argumentos.

3.2.10. Definición:

Una aparición de una variable individual en una expresión es indirecta ssi se halla bajo el radio de acción de dos letras de predicado.

3.2.11. Definición:

Un termino $\tau$ esta libre para substituir a una varia ble gramatical $\alpha$ en un término $\mu$ en todas las apariciones libres de dicha variable gramatical, ssi en caso de que alguna de dichas apariciones se situe en el radio de acción $\Gamma$ de algún $\Lambda\beta$ y que $\tau$ contenga a $\beta$, todas las apariciones libres de esta en $\tau$ sean directas y dicha aparición de $\alpha$ sea directa en $\mu$.

Dicho de una forma mas sencilla: siempre y cuando no se presenten nuevas interacciones entre cuantificadores y variables (no haya colisiones). Tengase presente que una aparición directa de una variable gramatical siempre es libre.

### 3.3. Axiomática.

Deseamos probar que una serie de axiomas son lógicamente validos, es decir verdaderos en cualquie interpretación; concretamente los que postulamos son los siguientes:

#### 3.3.1. Definición del sistema $S_A$.

Seran axiomas del mismo todas las instancias de los siguientes esquemas axiomaticos:

1. $\xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_1)$

2. $(\xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_3)) \rightarrow ((\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \xi_3))$

3. $(\neg\xi_2 \rightarrow \neg\xi_1) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \xi_2)$

4. $\Lambda\alpha\xi \rightarrow \xi$; si $\alpha$ no aparece libre en $\xi$.

$\Lambda x\xi \rightarrow \xi$; si x no aparece libre en $\xi$.

5. $\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$; si $\tau$ esta libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$.

$\Lambda x\xi(x) \rightarrow \xi(t)$; si t esta libre para x en $\xi(x)$ y x carece de apariciones libres e indirectas si t no es un nombre individual o una variable.

6. $\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \Lambda\alpha\xi_2)$; si $\alpha$ no aparece libre en $\xi_1$.

$\Lambda x(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \Lambda x\xi_2)$; si x no aparece libre en $\xi_1$.

Mientras que las reglas de deducción seran el Modus Ponens y la generalización (tanto respecto de variables individuales como respecto de las gramaticales).

De estos axiomas, desde luego el que necesita ser explicado es el quinto, y necesita serlo por lo débil; por imponer restricciones adicionale al termino t en caso de haber apariciones indirectas de x. Consideremos el ejemplo siguiente:

Sea "Padre(x)" la función que asigna a cada individuo x su padre, y sea "Ingeniero(x)" la propiedad que se verifica ssi el individuo x es ingeniero, mientras que "Piensa(x,$\alpha$)" es la relación que se verifica ssi el individuo x piensa que se verifica el hecho representado por $\alpha$. Podría ocurrir que fuese cierto:

$\Lambda$x Piensa [ x ; Ingeniero { Padre ( x ) } ]

Sin embargo, ello no nos autoriza a deducir:

$\Lambda$y Piensa [ Padre (y) ; Ingeniero { Padre [ Padre (y)]}]

Pues supongamos que se verifica:

Padre ( Juan ) = Pepe

Segun lo anterior ello significaría que:

Piensa [ Pepe , Ingeniero { Padre [ Padre ( Juan ) ] } ]

Lo cual no tiene porque ser cierto, pues Pepe puede no saber que es el padre de Juan y por tanto no creer que el padre del padre de Juan sea ingeniero. Se podróa objetar que ello es debido a que hemos evaluado la función "Padre(x)" cuando figura como termino individual pero no cuando figura dentro de un argumento gramatical. Ahora bien, ello tampoco es solución; supongamos que todo el mundo piensa que su padre es ingeniero:

$\wedge x$ Piensa [ x , Ingeniero { Padre ( x ) } ]

No expresaría en tal caso dicha creencia sino que todo el mundo piensa que la persona que en efecto es su padre es ingeniero. Cosa muy distinta (pues Juan puede creer que su padre es ingeniero y no creer que lo sea Pepe, porque piense que su padre es otro, digamos Luis) ; esa situación , de hecho se podría expresar de la forma:

$\wedge x \neg \wedge y \neg$[ y=Padre(x) $\cap$ Piensa{ x ; Ingeniero( y )}]

Es decir, si permitimos la evaluación de los terminos individuales indirectos, el significado de nuestras expresiones no es el deseado. Aparte de que hay casos en los que no es posible evaluarlas (porque esten cuantificadas); supongamos que "Antecesor(x,y)" designa al minimo antecesor común de x e y, entonces ¿cómo evaluar (dada x) "y" en la siguiente expresión?:

$\wedge x$ Piensa [ x ; $\wedge y$ { Ingeniero ( Antecesor [x,y] ) } ]

La variable y no esta definida, pues representa el conjunto de todos los individuos; se pueden poner aún peor las cosas:

$\wedge x$ Piensa [ x ; $\neg \wedge y \neg${ Ingeniero [ Antecesor (x,y) ] } ]

Pues significa que todo el mundo piensa que hay otra persona con la cual tiene un antepasado común que es ingeniero, pero no sabe en principio mas, ni cual es esa persona ni si es única, y desde luego no la podemos substituir por ningún individuo en concreto.

Asi pues, no es posible evaluar los terminos individuales situados en terminos gramaticales, si lo que queremos es representar adecuadamente predicados intensionales y tampoco el substituirlos por terminos arbitrarios.

Lo primero que necesitamos hacer es demostrar que los axiomas son lógicamente validos. Los tres primeros no plantean problemas, pues provienen del cálculo de proposiciones; pero para demostrar los demás se hace preciso dar ina serie de lemas. La demostración de dichos lemas es relativamente simple y se da en el apéndice.

3.3.2. Lema

Para todo termino individual T y valoración v, si v' es la valoración x-equivalente a v tal que $v'(x)=v(t)$, siendo t un nombre individual o una variable, entonces:

$T/v = T_{x/t}/v'$

( $T_{x/t}$ indica el termino resultante de substituir en T las apariciones de x por T).

3.3.3. Lema

Sean v yv' dos valoraciones x-equivalentes tales que $v'(x)=v(t)$; siendo $\xi(x)$ una expresión en la cual t esta libre para x y además tal que x no posea apariciones indirectas en $\xi(x)$ si t no es ni una constante ni una variable individual; entonces v' satisface $\xi(x)$ ssi v satisface $\xi(t)$.

3.3.4. Lema

Sean $\tau$ y $\mu$ terminos gramaticales cualesquiera y v y v' dos valoraciones $\alpha$-equivalentes tales que $v'(\alpha)=\tau/v$; entonces v' satisface $\xi(\alpha)$ ss v satisface $\xi(\tau)$.

3.3.5. Lema

Sea $\tau$ un termino gramatical libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ y sean

$v$ y $v'$ dos valoraciones $\alpha$-equivalentes tales que $v'(\alpha)=\tau/v$; entonces $v'$ satisface $\xi(\alpha)$ ssi $v$ satisface $\xi(\tau)$.

3.3.6. Lema

Si dos valoraciones atribuyen a todas las variables libres en una expresión $\xi$ los mismos valores; entonces una la satisface ssi la otra también lo hace.

3.3.7. Corolario

Una valoración satisface una expresión sin variables libres ssi toda valoración la satisface.

(Este corolario es evidente en base al lema anterior).

Naturalmente llamaremos verdaderas en una interpretación a aquellas expresiones que son satisfechas por todas las valoraciones, y falsas a las que no son satisfechas por ninguna. Evidentemente, una expresión cerrada sera verdadera o falsa necesariamente, pero no las dos cosas.

3.3.8. Teorema

Todos los axiomas anteriores son lógicamente verdaderos, es decir, satisfechos por todas las valoraciones en todas las interpretaciones.

Como además resulta sencillo probar:

3.3.9. Lema

Si $\xi$ es lógicamente verdadera, entonces tanto $\Lambda\alpha\xi$ como $\Lambda x\xi$ son lógicamente verdaderas, y si $\xi_1\rightarrow\xi_2$ y $\xi_1$ son lógicamente verdaderas, entonces $\xi_2$ tambien lo es.

Entonces es evidente que:

3.3.10. Corolario

Todos los teoremas de sistema $S_A$ son lógicamente verdaderos.

Asimismo es fácil demostrar por inducción sobre la longitud de las demostraciones en $S_A$ el metateorema de deducción .

3.3.11. Teorema

Sea S una extensión axio,ática consistente de $S_A$; sea $\xi_c$ una expresión sin variables libres; entonces en S es deduccble $\xi$ a partir de $\xi_c$ ssi es deducble en S $\xi_c\rightarrow\xi$.

Por otra parte es evidente el inmediato el siguiente lema:

3.3.12. Lema

Si una extensión de $S_A$ es inconsistente sosn deducibles en ella todas las expresiones.

Con lo que tras una demostración clásica se obtiene:

3.3.13. Teorema

Si una extensión axiomática de $S_A$ es consistente, entonces posee una extensión consistente completa.

Naturalmente por sistema completo entendemos aquel que dada una expresión cerrada cualaquiera $\xi_C$, entonces bien $\xi_C$ o bien $\neg\xi_C$ es teorema. La demostración no la incluimos, por ser muy directa: se toma una enumeración de todas las expresiones cerradas y se van añadiendo aquellas cuyas negaciones no son teoremas.

A continuación vamos a dar un teorema de completitud, pero sólo para la versión mas basica de estos sistemas; es decir para lenguajes que carecen de letras de función. Posteroirmente veremos dicho teorema con mayor generalidad, si bien para demostrarlo con dicha generalidad se hace preciso añadir axiomas.

El primer problema que hay que resolver es que nuestros dominios de interpretacion son bastante limitados. Necesitamos algo mas de generalidad para conseguir dar un teorema de completitud; en caso contrario podría ocurrir que el teorema de compacidad fallase: supongamos que tuviesemos el conjunto de expresiones $\{ A(c_1,A(c_2),\ldots;\neg\Lambda xA(x) \}$; siendo $c_1$, $c_2,\ldots$ una lista del conjunto de nombres individuales de nuestro lenguaje; cualquier subconjunto finito de este conjunto de expresiones es satisfacible (siempre y cuando A(x) sea relativamente razonable, por ejemplo: una expresión atómica) sin embargo el conjunto completo no lo es. Dado que normalmente se obtiene el teorem a de compacidad como consecuencia del de completitud, tendríamos bastantes problemas si antes no resolvemos este.

Observese que esprecisamente por no añadir mas elementos al dominio que los nombres individuales, por lo que el ejemplo anterior hace que falle el teorema de compacidad. Si hubiese otro elemento "k" podríamos pensar que es precisamente dicho elemento no presente en la lista el que no cumplía la propiedad representada por A.

Sin embargo, hay una forma relativamente intuitiva de enmendar el problema sin perder de vista la filosofía de nuestros lenguajes. En primer lugar necesitamos una definición:

3.3.13. Definición

Una extensión de un lenguaje $L_1$ es otro lenguaje $L_2$ con las mismas letras de predicado y de función, y con un conjunto de nombres individuales que contiene al conjunto de nombres individuales de $L_1$.

3.3.14 Definición

Una expresión es lógicamente valida ssi es satisfecha por cualquier valoración en cualquier interpretación de cualquier extensión del lenguaje al que pertenezca.

Esta definición es intuitivamente razonable, porque si hemos de aceptar que una expresión es valida simplemente por su forma, entonces hemos de aceptar que si el lenguaje de alguien evoluciona (porque aprenda nuevos terminos, por ejemplo) no debe por ello dejar de considerar logicamente validas las expresiones que antes consideraba como tales.

Intuitivamente, si aceptamos que los dominios de interpretación representan una visión del mundo, las definiciones anteriores vienen a sugerir la idea de que una visión no es algo fijo, sino que puede cambiar.

En cualquier caso, el teorema de completitud se puede dar para las expresiones asi definidas. Observemos primeramente que, dado que los esquemas axiomáticos han sido dados sin referirnos a ningun lenguaje en particular, sino que sus instancias son logicamente verdaderas en cualquier lenguaje, entonces son lógicamente validas y naturalmente los teoremas que de ellas se sigan también. Para lenguajes que no contengan letras de función esto es todo lo que se necesita .

3.3.14. Teorema de completitud (restringido)

Si una expresión de un lenguaje,que no contenga letras de función, es lógicamente válida entonces es torema del sistema $S_A$ correspondiente a dicho lenguaje.

De hecho el camino para demostrar este teorema pasa por demostrar el siguiente lema:

3.3.15. Lema

Sea S una extensión consistente de $S_A$; entonces si S es consistente existe una interpretación de una extensión del lenguaje al que pertenece S en la que son verdaderos todos los teoremas de S.

Las demostraciones de estos resultados las hemos suprimido, pues se trata de aplicar el clásico método de Henkin; en cualquier caso, revisando la demostración dada para sistema con funciones se encontrara que es fácil adaptarla para este caso mas sencillo, sin necesidad de hacer uso de los axiomas de la igualdad como allí hemos hecho, pues éstos sólo intervienen para las funciones.

3.4. Procesos de decisión

El anterior teorema garantiza la existencia de procesos de decisión. Dado que el conjunto de teoremas coincide extensionalmente con el de expresiones logicamente válidas, bastaría con ir generando de forma mecánica todos los teoremas para que, si una expresión es logicamente válida, tarde o temprano aparezca en la lista y podamos por tanto contestar afirmativamente. De hecho se pueden hacer cosas bastante mejores, por ejemplo; podemos intentar adaptar el proceso de decisión de Kleene [Kleene 69]. Como es sabido el proceso de decisión de Kleene se basa en la búsqueda sistemática de un contraejemplo; la idea es que, de no existir contraejemplos, todos los caminos de búsqueda se nos cierran y por tanto, si una fórmula es válida, ello se manifiesta en que al cabo de un tiempo finito podemos demostrar que lo es.

Esa búsqueda se basa en ir simplificando las expresiones de manera que nos vayan delimitando qué propiedades ha de verificar el dominio de interpretación. El proceso acaba cuando vemos que no hay forma de evitar el pedirle al dominio propiedades cotradictorias; pero veamos las reglas que vamos a adopta nosotros. En general, tendremos un conjunto de expresiones $\Gamma$ que debemos verificar y, un conjunto â de expresiones que han de falsearse en la interpretación; para simplificar el proceso vamos a considerar unicamente secuentes cerrados, es decir, aquellos en los que todas las expresiones que forman parte del secuente carecen de variables libres. En concreto, las reglas que vamos a emplear son:

1. $\dfrac{\Gamma, A \supset B, \Delta}{\Gamma \supset A \rightarrow B, \Delta}$ ; 2. $\dfrac{\Gamma, B \supset \Delta \ ; \ \Gamma \supset A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \supset \Delta}$

$$3.\ \frac{\Gamma, A \supset \Delta}{\Gamma \supset \neg A, \Delta} \quad ; \quad 4.\ \frac{\Gamma \supset A, \Delta}{\Gamma, \neg A \supset \Delta}$$

$$5.\ \frac{\Gamma \supset A(k_i), \Delta}{\Gamma \supset \Lambda x A(x), \Delta} \quad ; \quad 6.\ \frac{\Gamma, \Lambda x A(x), A(n) \supset \Delta}{\Gamma, \Lambda x A(x) \supset \Delta}$$

$$7.\ \frac{\Gamma \supset A[B(k_j)], \Delta}{\Gamma \supset \Lambda \alpha A(\alpha), \Delta} \quad ; \quad 8.\ \frac{\Gamma, \Lambda \alpha A(\alpha), A(\xi) \supset \Delta}{\Gamma, \Lambda \alpha A(\alpha) \supset \Delta}$$

Las cuatro primeras reglas están tomadas directamente de Kleene; en cuanto a las cuatro últimas hay que hacer unas aclaraciones. En la quinta regla $k_i$ debe ser una constante individual nueva, es decir, que no aparezca en ninguna parte dentro del secuente situado debajo de la línea. Otro tanto reza para $k_j$ en la séptima regla. B(x) ha de ser cualquier expresión con una y sólo una variable indivdual libre, que es la que sera substituida por $k_j$. En cuanto a la sexta regla "n" ha de ser un nombre individual (recuerdese que ha de ser un término cerrado porque sólo queremos expresiones cerradas y, además, carecemos de funciones en estos lenguajes que ahora consideramos. Y por último en la octava regla $\xi$ ha de ser una expresión cerrada.

Necesitamos algún que otro lema:

3.4.1. Lema

Al aplicar cualquiera de estas reglas cada secuente superior es cerrado ssi el inferior lo es.

Este lema es evidente.

3.4.2. Definición

Diremos que un secuente es falsable ssi existe alguna interpretación de alguna extensión del lenguaje (al que pertenece dicho secuente) que hace verdaderas todas las expresiones de antecedente y falsas todas las del cosecuente.

3.4.3. Lema

Para cada una de las reglas anteriores, el secuente inferior es falsable ssi al menos uno de los secuentes superiores es falsable.

El demostrar este lema para las cuatro primeras reglas es inmediato y queda como ejercicio para el lector. Para la sexta y octava también es relativamente sencillo; veámoslo, po ejemplo, para la sexta: si existe una interpretación que hace verdaderas $\Gamma,\Lambda xA(x)$ y $A(n)$ mientras que falsea $\Delta$, entonces naturalmente esa misma interpretación hace verdaderas $\Gamma,\Lambda xA(x)$ y falsea $\Delta$. Por otra parte, si en una interpretación son verdaderas $\Gamma,\Lambda xA(x)$ y falsa $\Delta$ no puede ser falsa $A(n)$; en efecto, si$\Lambda xA(x)$ es verdadera, toda valoración la satisface; consideremos entonces una valoración v cualquiera, si dicha valoración no satisfaciese $A(n)$, la valoración v' x-equivalente a v, tal que $v'(x)=n$ $(=v(n))$ no satisfacería $A(x)$, lo cual no es posible (lema 3.3.3.) ya que al satisfacer v $\Lambda xA(x)$, toda valoración x-equivalente debe satisfacer $A(x)$, entre ellas v'.

Otro tanto se puede hacer con la octava regla, pero utilizando el lema 3.3.5.

La quinta y la séptima son algo mas delicadas, pero es posible demostrar el lema en virtud del teorema de completitud, que ya hemos indicado.

En primer lugar la parte, "si el secuente superior es falsable, el inferior también lo es", es inmediata ya que, considerando la misma interpretación, si $A(k_i)$ es falsa $\wedge xA(x)$ no puede ser verdadera: dada una valoración cualquiera v, considerese la valoración v' x-equivalente tal que $v'(x)=k_i$; si v' satisfaciese $A(x)$ debería satisfacer también $A(k_i)$ (lema 3.3.3.), lo cual es falso. Otro tanto puede decirse de la séptima.

La parte dificil es demostrar, que si el secuente inferior es falsable , el superior también lo es; pero por el teorema de completitud sabemos que toda extensión S del sistema $S_A$ (para el lenguaje considerado L) posee una interpretación de una extensión de L, en la cual todo teorema de S es verdadero:

Sea $L_1$ el lenguaje del secuente inferior y $L_2$ el del superior; naturalmente $S_{A1} \cup \{\Gamma, \neg\wedge xA(x), \neg\Delta\}$ es consistente pues posee una interpretación en la cual sus axiomas son verdaderos (por hipótesis). En $L_2$, $S_{A2} \cup \{\Gamma, \neg\wedge xA(x), \neg\Delta\}$ es consistente ya que, de haber una contradicción, substituyendo $k_1$ por una variable que no aparezca en ningún lugar en la demostración de la cotradicción, obtendríamos una inconsistencia en el sistema original (como se ve es practicamente el mismo razonamiento que en la demostración del torema de completitud).

Supongamos que $\Gamma, \neg\Delta, \neg A(k_i)$ fuese inconsistente; dado que $\Gamma$, $\neg\Delta$ es consistente ello solo podría ser debido a que $A(k_i)$ es deducible a partir de $\Gamma$, $\neg\Delta$; pero, en dicho caso igualmente sería deducible $A(x)$ y, por generalización, $\wedge xA(x)$; asi pues, $\Gamma$, $\neg\wedge xA(x)$, $\neg\Delta$ no sería consistente.

Puesto que $\Gamma$, $\neg\Delta$, $\neg A(k_i)$ es consistente, existe una interpretación de una extensión de $L_2$ en la que son verdaderos. Dicha interptación evidentemente falsea $\Gamma \supset \Delta, A(k_i)$.

Otro tanto se puede hacer con la octava regla.

Ello demuestra el lema 4.3.

Ahora hemos de dar el método de búsqueda sistemática de contraejemplo. Con Kleene, para nosotros un camino se cerrara cuando aparezca un secuente de la forma $\Gamma,C\supset\Delta,C$ donde C es una expresión atómica.

La estrategia que vamos a adoptar es la siguiente, en primer lugar consideraremos dos listas: la de los nombres individuales del lenguaje al que pertenece el secuente inicial y una lista de nuevas constantes individuales $k_i$:

$n_1, n_2, \ldots., n_m, \ldots$
$k_1, k_2, \ldots., k_s, \ldots$

(La lista de nombres individuales $n_m$ puede ser finita si asi lo exige el lenguaje, pero la de las $k_s$ es potencialmente infinita).

Las aplicaciones de las reglas 1ª a 8ª las haremos en rondas; en cada una de ellas se aplicará un número finito de veces aquella regla que corresponda a cada una de las expresiones del secuente $\Gamma\supset\Delta$ de partida. Concretamente todas las reglas se aplicarán sólo una vez salvo la sexta y la octava. La sexta se ha de aplicar a todas las $k_i$ que se hayan activado hasta el momento, asi como a todos los nombres individuales presentes en el secuente y a uno mas en caso de que exista.

Por otra parte, para la octava regla dispondremos de una lista de todas las expresiones cerradas del lenguaje del secuente inicial ampliado con las constantes $k_1$, $k_2$,.. ...Entonces, de dicha lista, en un momento dado cogeremos la primera expresión situada hacia la derecha que, sólo contenga nombres individuales del lenguaje original y constantes $k_i$ activadas, y además todas las situadas hacia la izquierda que cumpla esa misma condición.

Un camino se considerará terminado si se cierra, o si ya no es posible aplicar ninguna regla.

Veamos entonces que para cada camino no cerrado hay una interpretación que constituye un contraejemplo. Sea L el lenguaje original extendido con todas las constantes individuales nuevas que aparezcan en algún punto del camino. El dominio a considerar es precisamente el dominio correspondiente a este lenguaje ampliado; es decir, vamos a considerar una interpretación de este lenguaje L. Esta vendra definida de la siguiente forma: sea $U\Gamma_a$ el conjunto de las expresiones atómicas que aparecen en algún antecedente del conjunto de secuentes formados a lo largo del camino, y $U\Delta_a$ el conjunto de las que aparecen en algún consecuente. Naturalmente, como ya es sabido, ambos conjuntos son disjuntos, pues en caso contrario, el camino se habría cerrado.

La interpretación esta dada de la siguiente forma:

$\bar{F}_r{}^{p,q}(c_1,\ldots,c_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$

se verificará ssi $F_r{}^{p,q}(c_1,\ldots,c_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$ figura en$U\Gamma_a$.

Sea $U\Gamma$ el conjunto de todas las expresiones que figuran en algun antecedente y $U\Delta$ el de las que figuran en algun consecuente a lo largo del camino, entonces:

3.4.4. Lema

Todas las expresiones de $U\Gamma$ son verdaderas en la interpretación antes definida y todas las de $U\Delta$ falsas.

Se demuestra por inducción:

El paso base (las expresiones atómicas) es evidente, pues la interpretación ha sido definida para que una expresión atómica sea verdadera ssi figura en $U\Gamma$, además hemos visto que $U\Gamma_a$ y $U\Delta_a$ son disjuntos.

Paso de inducción: supuesta $\xi$ construida con n cuantificadores y/o conectivas (fuera del radio de acción de letras de predicado), y que el lema es valido para las de n-1, veamoslo para $\xi$; hay varios casos posibles:

- Si $\xi$ es de la forma $\neg\xi_1$ entonces: $\xi \varepsilon U\Gamma$,será que $\xi_1 \varepsilon U\Delta$, con lo que $\xi_1$ será falsa y $\xi$ será verdadera; si $\xi \varepsilon U\Delta$, sera que $\xi_1 \varepsilon U\Gamma$ con lo que $\xi_1$ es verdadera y $\xi$ es falsa.

- Si $\xi$ es de la forma $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, entonces si$\xi \varepsilon U\Delta$, sera que $\xi_1 \varepsilon U\Gamma$ y $\xi_2 \varepsilon U\Delta$, con lo que $\xi$ es falsa (al ser $\xi_1$ verdadera y $\xi_2$ falsa). Si $\xi \varepsilon U\Gamma$, entonces, o bien $\xi_2 \varepsilon U\Gamma$ o bien $\xi_1 \varepsilon U\Delta$, en cualquiera de los dos casos $\xi$ es verdadera.

- Si $\xi$ s de la forma $\Lambda x \xi_1(x)$, entonces si $\xi \varepsilon U\Gamma$, aparecerán en $U\Gamma$ todas las expresiones de la forma $\xi(c)$ para cualquier constante individual "c"; por hipótesis de inducción estas son verdaderas, y por el proceso de construcción aparecen todos los nombres del lenguaje L, ya sean estos del antiguo lenguaje o sean nuevas constantes individuales; esto es debido a que un $\Lambda x \xi(x)$ en el antecedente no desaparece y se ensaya con todos los nombres del antiguo lenguaje y con todas las nuevas $k_i$ que se vayan añadiendo. Por tanto, es evidente que $\Lambda x \xi(x)$ será verdadera. Por contra si $\xi \varepsilon U$, entonces hay una $k_s$ tal que $\xi_1(k_s) \varepsilon U$ y que será falsa; asi pues $\xi$ también sera falsa.

- Si $\xi$ es de la forma $\Lambda \alpha \xi_1(\alpha)$, el razonamiento es análogo, lo único que hay que tener en cuenta es que cuando está en el antecedente efectivamente se generan todas las expresiones $\xi_1(\xi)$ del lenguaje L que se está construyendo pues, tan pronto como se añade una constante $k_i$, se ensayan las expresiones que estaban ateriormente en la lista con $k_i$ y pasan a ser consideradas como objeto de ensayo las que se hallen mas adelante.

El plan que hemos adoptado intenta minimizar el número de nuevas constantes individuales a introducir; sería un poco más sencillo un plan que hiciese un mayor uso de las constantes indviduales. Por otra parte, también hay que recordar que al aplicar las reglas sexta y octava sólo es preciso hacerlo respecto de aquellas expresiones que hemos señalado, pero que no se hayan empleado con la misma expresión y a lo largo del mismo camino.

Asi pues hemos demostrado el siguiente lema :

3.4.5. Lema

Para cada camino no cerrado existe una interpretación en la que son verdaderas todas las expresiones de $\cup\Gamma$ y falsas todas las de $\cup\Delta$.

En consecuencia, podemos concluir que si un secuente carece de contraejemplo (es logicamente válido) todos los caminos se deben de acabar cerrando.

De otro lado, supongamos que todos los caminos se cierran; ninguno de los secuentes finales es falsable y naturalmente los secuentes anteriores tampoco lo pueden ser porque necesitarían que, al menos uno superior lo fuese. Al cabo de un número de pasos finito llegamos a la conclusión de que el secuente original no es falsable (lema de König).

Por lo tanto, ssi todos los caminos de búsqueda de cotraejemplos se cierran al cabo de un número finto de pasos, el scuente original es logicamente válido; es decir, tenemos un procedimiento de decisión.

## 3.5. El teorema de completitud

Volvamos ahora al caso de lenguajes con letras de función. Para este caso general con sólo los axiomas indicados en 3.3., no hemos sido capaces de proporcionar un teorema de completitud (la dificultad en realizar la demostración estriba en garantizar una asignación coherente de los valores de las funciones); sin embargo, si se añaden al sistema los axiomas de la igualdad, sí que es posible darlo. Para simplificar la escritura, $\Lambda_\alpha$ va a significar de ahora en adelante "generalización respecto de todas las variables gramaticales libres que se hallen bajo el radio de acción del cuantificador", es decir, la expresión $\xi$ en $\Lambda_\alpha\xi$; otro tanto significará $\Lambda_x$. Los axiomas que necesitamos introducir son los siguientes:

I.1. $\Lambda x(x=x)$

I.2. $\Lambda_x\Lambda y[(t_k=y)\rightarrow f_m{}^n(t_1,..,t_k,..,t_m)=f_m{}^n(t_1,..,y,..,t_m)]$

I.3. $\Lambda_\alpha\Lambda_x\Lambda y[(t_k=y)\rightarrow\{F_r{}^{p,q}(t_1,.,t_k,.,t_p;\tau_1,.,\tau_q)\rightarrow F_r{}^{p,q}(t_1,.,y,.,t_p;\tau_1,.,\tau_q)\}]$

Naturalmente los anteriores "axiomas" son esquemas axiomáticos, pues los $t_i$ pueden ser cualesquiera términos individuales, $f_m{}^n$ cualquier letra de función, etc.

Hemos introducido la notación del símbolo "=" ya que es usual el hacerlo asi, en cualquier caso, se podría utilizar en su lugar una letra de predicado individualcomo $A_1{}^2$.

Obsérvese que en el tercer esquema axiomático los términos gramaticales no son alterados, mejor dicho, que no existe ningún esquema axiomático que nos permita realizar sustituciones en los términos gramaticales. Esto es así porque ya sabemos que en contextos intensionales la sustitutividad falla.

Es sabido que en lógica de primer orden no es posible definir la igualdad;es decir, los axiomas I.1, I.2 e I.3 no garantizan que en cualquier interpretación en la que sean ciertos, la interpretación de "=" (de $A_1^2$) sea precisamente la igualdad (la relación que cada elemento mantiene unica y exclusivamente consigo mismo) sino que puede ser basicamente cualquier relación de equivalencia. Ello a nosotros nos viene muy bien porque pudiera ser que en alguna interpretación los nombres individuales "Paco" y "Francisco" signifiquen exactamente lo mismo, es decir que Paco sea Francisco. Dicho de otra manera, nuestra "igualdad" es poco mas que cualquier relación de equivalencia que se haya definido sobre el dominio de individuos.

Decimos "poco mas" porque en cierto sentido es mas (si no bastaría con los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad). Deseamos que dos elementos equivalentes lo sean también respecto de cualquier otra relación o función que se defina sobre el dominio de individuos. De ahi que se escojan los esquemas axiomáticos I.1-I.3 y no simplemente los de axiomas de equivalencia (que de hecho se deducen facilmente de ellos).

Necesitamos ir preparando el camino con algunas definiciones y algun lema sencillo. Naturalmente de ahora en adelante sólo consideraremos lenguajes que contengan el simbolo "=" (o de forma equivalente $A_1^2$),por lo que de forma implicita se supondra que tal cosa ocurre en todas las discusiones siguientes.

3.5.1. Definición

Para un lenguaje dado, el sistema $S_I$ asociado es el obtenido añadiendo al sistema $S_A$ correspondiente todas las instancias de I.1-I.3.

Es evidente que existen interpretaciones donde dichos axiomas son verdaderos y por tanto los sistemas $S_I$ son consistentes.

El siguiente lema es muy sencillo pero nos va a ser muy útil.

3.5.2. Lema

Para cualquier término individual cerrado T se verifica que es teorema de $S_I$:

$\neg\Lambda y\neg[T=y]$

Supongamos que esta expresión no fuese teorema de $S_I$; entonces por ser $S_I$ una extensión consistente de $S_A$, podríamos añadir su negación como axioma y obtener un sistema consistente; pero si se hace tal cosa tendríamos como axioma,

$\Lambda y\neg(T=y)$

con lo que al estar T libre para "y" (siendo además T cerrado no hay que hacer ninguna sustitución dentro de él) se deduce:

$\neg(T=T)$

lo cual contradice directamente a I.1; por lo tant, obtenemos una contradicción y, de ahí, que $\neg\Lambda y\neg[T=y]$ deba ser teorema. Naturalmente se puede formular el lema con mayor generalidad, basta que "y" no aparezca en T, pero no lo vamos a necesitar.

3.5.3. Definición

Para un lenguaje dado, llamaremos una realización de mismo a cualquier interpretación en la cual todos los axiomas del sistema $S_I$ asociado sean verdaderos.

En otras palabras a cualquier modelo de $S_I$.

3.5.4. Definición

Diremos que una expresión es realmente válida ssi es verdadera en cualquier realización de cualquier extensión del lenguaje al que pertenezca.

Entonces el teorema de completitud se puede enunciar de la siguiente forma:

3.5.5. Teorema

Si una expresión es realmente válida, entonces es teorema del sistema $S_I$ correspondiente al lenguaje al que pertenezca.

Para ello antes habrá que demotrar el siguiente lema:

3.5.6. Lema

Para cualquier extensión consistente S de un sistema $S_I$ existe una realización de una extensión del lenguaje correspondiente en la que es verdadero todo teorema de S.

El método para demostrar este lema se basa en la clásica prueba de Henkin. En primer lugar, aumentaremos el lenguaje $L_1$ del sistema S de partida para formar un lenguaje $L_2$. Añadimos a $L_1$ una lista infinita de constantes individuales $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$; sea S' el sistema obtenido añadiendo a $S_{I2}$ los axiomas propios de S. Naturalmente si S' es consistente S lo es, pues cualquier demostración en S es repetible en S. Pero también es importante que se da a la inversa, si S es consistente S' lo es: supongamos que no ocurriese asi: entonces existiría una expresión $\xi'$ tal que $\xi'$ y $\neg\xi'$ serían teoremas de S'. Pero sustituyendo en las demostraciones de $\xi'$y $\neg\xi$ todas las apariciones de las constantes individuales $k_i$, que en ellas hubiese, por nuevas variables "$y_i$", se lograrían en S unas demostraciones de dos expresiones $\xi$ y $\neg\xi$. La razón de ello radica en que las reglas de deducción son las mismas; los axiomas no lógicos, los mismos; y en los axiomas lógicos (incluyendo I.1-I.3) si se sustituyen las constantes individuales $k_i$ por variables, se obtienen bien otros axiomas, o bien (como es fácil de ver) teoremas inmediatos, pero del propio S ya que el lenguaje es $L_1$ al no figurar las $k_i$.

A continuación formamos tres listas: la de todas las expresiones con sólo una variable individual libre, la de todas las expresiones con sólo una variable gramatical libre y, la de todos los teminos individuales cerrados de la forma $f_m^n(c_1,\ldots,c_n)$,

1. $A_1(x_{i1}),A_2(x_{i2}),\ldots$
2. $B_1(\alpha_{j1}),B_2(\alpha_{j2}),\ldots$
3. $T_1,T_2,T_3,\ldots$

Siendo la lista de constantes individuales nuevas:

$k_1,k_2,k_3,\ldots$

Vamos a formar una lista de axiomas a añadir a S' de la siguiente manera ; esta lista sera de la forma:

$\neg\Lambda\neg x_{i1}A_1(x_{i1})\rightarrow A_1(k_{s3})$
$\neg\Lambda\neg\alpha_{j1}B_1(\alpha_{j1})\rightarrow B_1(H[k_{s4}])$
$T_1=k_{s5}$

.

.

.

$\neg\Lambda\neg x_{in}A_n(x_{in})\rightarrow A_n(k_{s3n})$
$\neg\Lambda\neg\alpha_{jn}B_{n1}(\alpha_j)\rightarrow B_{n1}(H[k_{s3n+1}])$
$T_n=k_{s3n+2}$

.

Donde $k_{s3}$ sera la primera constante individual que no figure en $A(x_{i1})$, $k_{s4}$ la primera que no figure ni en $B_1(\alpha_{j1})$ ni en $\neg\Lambda\neg x_{i1}A_1(x_{i1})\rightarrow A_1(k_{s3})$ y $k_{s5}$sera la primera que no figure ni en $T_1$ ni en ninguno de los otros dos axiomas.

En general $k_{s3n}$sera la primera que no figure ni en $A_n(x_{in})$ ni en ninguno de los axiomas anteriores; $k_{s3n+1}$ sera la primera que no figure ni en $B_n(\alpha_{jn})$ ni en los axiomas anteriores y $k_{s3n+2}$ la primera que no figure ni en $T_n$ ni en los axiomas anteriores. Naturalmente $H(x)$ es cualquier expresión con unicamente una variable libre (de forma que $H(k_r)$ es cerrada), aunque por simplicidad , se supondra que es una expresión atómica.

Sea $S_0$ el sistema S', y sea $S_m$ el sistema obtenido al añadir los m primeros axiomas. Vamos a ver que para cualquier m $S_m$ es consistente; el proceso lo vamos a realizar por inducción sobre n; supondremos que $S_{3n}$ es consistente y veremos que $S_{3(n+1)}$ lo es también en dicho caso.

El paso base $S_0$ ya está garantizado pues sabemos que S' es consistente.

Supongamos que $S_{3n}$ es consistente; entonces vamos a ver en primer lugar que $S_{3n+1}$ es consistente , luego veremos que tambien lo es $S_{3n+2}$ y por último que también lo es $S_{3n+3}$; es decir que lo es $S_{3(n+1)}$.

$S_{3n+1}$ es el sistema obtenido añadiendo a $S_{3n}$ el 3n-esimo axioma, el cual es: $\neg\Lambda\neg x_{in}A_n(x_{in})\rightarrow A_n(k_{s3n})$. La demostración de que $S_{3n+1}$ es consistente es entonces la típica: si ello no fuese asi, sólo podría ser debido a que la negación de la anterior expresión sería deducible en $S_{3n}$; es decir serían teoremas de $S_{3n}$: $\neg\Lambda\neg x_{in}A_n(x_{in})$ y $\neg A_n(k_{s3n})$

Como $k_{s3n}$ no figura en ninguno de los axiomas propios de

$S_{3n}$ y si se la sustituye en los axiomas lógicos por una variable "y" (que no aparezca en ningún lugar de la demostración de $\neg A_n(k_{s3n})$) se obtienen expresiones que o bien son teoremas o bien son axiomas lógicos, se puede repetir la demostracion de $\neg A_n(k_{s3n})$ pero con "y" en lugar de $k_{s3n}$, logrando obtener $\neg A_n(y)$, y por generalización $\Lambda y \neg A_n(y)$. Naturalmente de aqui se puede pasar a $\Lambda x_{in} A_n(x_{in})$, ya que las posiciones que ocupa "y" son las que ocupaba $k_{s3n}$, que son las antiguas posiciones libres de $x_{in}$, es decir "y" no puede estar libre bajo ningún $\Lambda x_{in}$. Asi pues $S_{3n}$ sería inconsistente contrariamente a hipótesis. Por lo tanto, $S_{3n+1}$ debe ser consistente.

Veamos ahora que $S_{3n+2}$ también lo es. La idea es la misma, de no ser consistente significaría que es teorema del sistema anterior la negación del axioma que se añade, o lo que es lo mismo que serían teoremas de $S_{3n+1}$:

$$\neg \Lambda \neg \alpha_{jn} B_{n1}(\alpha_j) \text{ y } \neg B_{n1}(H[k_{s3n+1}])$$

Sea $\alpha$ una variable que no aparece en ninguna parte de la demostración de $\neg B_{n1}(H[k_{s3n+1}])$; en tal caso la misma demostración de dicha expresión pero con $\alpha$ sustituyendo a $H(k_{s3n+1})$ es válida,ya que $H(k_{s3n+1})$ no puede aparecer entre los axiomas propios de $S_{3n+1}$ por no aparecer en ellos $k_{3n+1}$ y por otra parte en los lógicos al sustituir $H(k_{s3n+1})$en todas partes en las que figure como argumento, se logra un núevo axioma lógico o un teorema fácilmente deducible de los axiomas lógicos. Por ello sera deducible:

$$\neg B(\alpha)$$

y por tanto, $\Lambda\alpha\neg B(\alpha)$; con lo que igualmente $S_{3n+1}$ sería inconsistente, cosa que ya sabemos que no es posible: asi pues, $S_{3n+2}$ sera consistente.

Por último $S_{3n+3}$sera el sistema obtenido añadiendo a

$S_{3n+2}$ el axioma:

$$T_n = k_{s3n+2}$$

Si dicho sistema fuese inconsistente debería de ser teorema de $S_{3n+2}$ la expresión:

$$\neg T_n = k_{s3n+2}$$

Pero analogamente, por no figurar $k_{s3n+2}$ entre los axiomas propios de $S_{3n+2}$, siendo "y" una variable que no aparece en la demostración de la anterior expresión, debería ser teorema :

$$\neg(T_n = y)$$

y por tanto, también:

$$\wedge y[\neg(T_n = y)]$$

Lo cual sería una contradicción con el lema 3.5.1.(para esto precisamente necesitábamos dicho lema); dado que sabemos que $S_{3n+2}$ es consistente, concluimos que $S_{3n+3}$ también lo es.

Ello completa el proceso de inducción .

Formamos a continuación el sistema $S_L$, el cual contiene como axiomas todos aquellos que figuran como tales en algún $S_n$. Es claro que $S_L$ es consistente, pues en caso de no serlo habría una expresión $\xi$ tal que $\xi$ y $\neg\xi$ serían ambas demostrables en $S_L$, y por utlizar dichas demostraciones un número finito de axiomas, serían repetibles en algún $S_n$; por tanto, este sería inconsistente, cosa que ya sabemos que no es cierta. Asi pues $S_L$ es consistente; como ya sabemos, toda extensión consistente del sistema $S_A$ posee una extensión consistente y completa. Sea $S_C$ la extensión consistente y completa de $S_L$; entonces vamos a definir la sguiente interpretación de $L_2$:

$$\bar{F}_r^{p,q}(n_1,\ldots,n_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

se verificará ssi la expresión,

$$F_r^{p,q}(n_1,\ldots,n_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

es teorema de $S_C$. Nótese que esta definición incluye, como caso particular a la relación que es la interpretación de "=". Por otra parte, las funciones serán definidas de la siguiente forma:

$$\bar{f}_m^n(c_1,\ldots,c_n)=k_h$$

si $k_h$ es la constante individual asignada al término individual $f_m^n(c_1,\ldots,c_n)$.

3.5.7. Sublema

Sea T un termino individual cerrado cualquiera de $L_2$ y v cualquier valoración;si v(T)=k, entonces T=k es teorema de $S_C$.

Paso base:

Para términos individuales n que sean constantes esto es cierto, ya que v(n)=n y n=n es teorema de $S_C$.

Paso de inducción:

Supuesto el lema valido para términos con menos de p letras de función, veámoslo para p.

$$\text{Si } v[f_m^n(T_1,\ldots,T_m)]=k$$
$$\text{pero } v[f_m^n(T_1,..,T_n)]=\bar{f}_m^n(v(T_1),\ldots,v(T_n))=$$
$$=\bar{f}_m^n(k_1,\ldots,k_n)=k$$

pero por el proceso de construcción de $S_C$,

$$f_m^n(k_1,\ldots,k_n)=k$$

es teorema de $S_C$; además por hipótesis de inducción

$$T_1=k_1,\ldots,T_n=k_n$$

son teormas de $S_C$, por lo que no es difícil demostrar en $S_C$ que,

$$f_m^n(T_1,\ldots,T_n)=k$$

basta con ir aplicando reiterativamente el esquema axiomatico I.2. de la forma siguiente:

$$\wedge x_1[T_1=x_1\rightarrow f_m^n(T_1,..,T_n)=f_m^n(x_1,T_2,..,T_n)]$$

con lo que es inmediato,

$$f_m^n(T_1,..,T_n)=f_m^n(k_1,T_2,..,T_n)]$$

$$\wedge x_2[T_2=x_2\rightarrow f_m^n(k_1,T_2,..,T_n)=f_m^n(k_1,x_2,..,T_n)]$$

siendo de nuevo inmediato

$$f_m^n(k_1,T_2,..,T_n)=f_m^n(k_1,k_2,..,T_n)]$$

etc.

Lo anterior demuestra el sublema.

Ahora debemos de mostrar que para cualquier expresión atómica

$$F_r^{p,q}(T_1,\ldots,T_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

dicha expresión es teorema de $S_C$ ssi es cierta.

Si $T_1,\ldots,T_p$ son constantes individuales, tenemos garantizado el que $F_r^{p,q}(n_1,\ldots,n_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$ sea verdadera por la definición de la interpretación.

Supongamos que sea teorema,

$$F_r^{p,q}(T_1,\ldots,T_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

para que sea verdadera se ha de verificar

$$\bar{F}_r^{p,q}(k_1,\ldots,k_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

donde $k_1=v(T_1),\ldots,k_p=v(T_p)$.

Naturalmente, si podemos demostrar que

$$F_r^{p,q}(k_1,\ldots,k_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

es teorema de $S_C$, entonces en efecto se verificará

$$\bar{F}_r^{p,q}(k_1,\ldots,k_p;\xi_1,\ldots,\xi_q)$$

El procedimiento es el mismo que en el sublema anterior, pero empleando el esquema axiomatico I.3.,

$$\wedge x_1[T_1=x_1\rightarrow\{F_r^{p,q}(T_1,..,T_p;\xi_1,..,\xi_q)\rightarrow F_r^{p,q}(k_1,T_2,..,T_p;\xi_1,..,\xi_q)\}]$$

con lo que como, por el sublema anterior, $T_1=k_1$,es teorema de $S_C$ se deduce inmediatamente:

$$F_r^{p,q}(k_1,T_2,..,T_p;\xi_1,..,\xi_q)$$

el paso siguiente se haría con $T_2,x_2$ y $T_2=k_2$,etc.

Asi pues, podemos dar por sentado que si una expresión atómica es teorema entonces es verdadera, y viceversa: veamos que si es verdadera es teorema; en primer lugar, para expresiones de la forma,

$$F_r^{p,q}(n_1,\dots,n_p;\xi_1,\dots,\xi_q)$$

ya sabemos que la interpretación ha sido definida de forma que dicha expresión es verdadera ssi es teorema de $S_C$.

Supongamos que es verdadera

$$F_r^{p,q}(T_1,\dots,T_p;\xi_1,\dots,\xi_q)$$

ello es porque se verifica

$$\bar{F}_r^{p,q}(k_1,\dots,k_p;\xi_1,\dots,\xi_q)$$

donde $v(T_1)=k_1,\dots,v(T_p)=k_p$, pero en tal caso es teorema

$$F_r^{p,q}(k_1,\dots,k_p;\xi_1,\dots,\xi_q)$$

y ademas son teoremas :

$$T_1=k_1,\dots,T_p=k_p$$

La idea es la misma; a partir de estas expresiones por uso repetido del esquema axiomático I.3. se demuestra que la expresión en cuestión es teorema.

Ello demuestra que una expresión atomica cerrada es teorema de $S_C$ ssi es verdadera.

Veamos ahora el paso de inducción, esta se realizará sobre el número de conectivas y/o cuantifcadores externos, suponiendo la hipótesis de inducción válida hasta n-1, demostrémosla para n.

1. $\xi$ es de la forma $\neg\xi_1$; si $\xi$ es teorema $\xi_1$ no lo es, por tanto, esta última es falsa y $\xi$ verdadera (nos apoyamos en la consistencia). Si $\xi$ no es teorema $\xi_1$ lo seráa (completitud), por lo que $\xi_1$ es verdadera y $\xi$ falsa.

2. $\xi_1 \to \xi_2$. Si no es teorema su negación lo es y, por tanto, son teoremas $\xi_1$ y $\neg\xi_2$, con lo cual $\xi_1$ es verdadera y por lo visto en el punto anterior $\neg\xi_2$, luego $\xi_1 \to \xi_2$ es falsa. Si es teorema pueden darse dos casos:

   - Si $\xi_1$ es teorema entonces $\xi_2$ también lo es;ambas son verdaderas y $\xi_1 \to \xi_2$ también lo es.

   - Si $\xi_1$ no es teorema entonces ya sabemos que es falsa y $\xi_1 \to \xi_2$ es verdadera.

3. $\Lambda x \xi(x)$. Si es teorema también lo es $\xi(k)$ para cualquier k; al ser estas teoremas, seran verdaderas y es evidente que también lo será $\Lambda x \xi(x)$. Si no es teorema, lo será $\neg\Lambda x \xi(x)$ y debido al proceso de construcción del sistema $S_C$,habrá un $k_j$ tal que

$$\neg\Lambda x \neg(\neg\xi(x)) \to \neg\xi(k_j)$$

   es teorema, es decir $\neg\xi(k_j)$ sería teorema y por lo visto con anterioridad, verdadero, lo que implica que $\Lambda x \xi(x)$ es falso.

4. $\Lambda \alpha \xi(\alpha)$. Se demuestra analogamente al caso anterior, pero al considerar la posibilidad de que no sea teorema, se ha de tener en cuenta $H(k_s)$.

Ello demuestra que todas las expresiones cerradas que son teoremas de $S_C$ son verdaderas en la interpretación definida, en particular, lo son los axiomas de la igualdad; luego se trata de una realización del lenguaje $L_2$, y además lo son provinientes de S, lo cual demuestra el lema 3.5.5. y con él en la mano se demuestra con facilidad el 3.5.6.:

Supongamos que hubiese una expresión realmente válida que no fuese teorema del sistema $S_I$ crrespondiente al lenguaje de dicha expresión. Podemos suponer que se trata de una expresión cerrada (dado que una expresión cualquiera es teorema ssi su cierre lo es y que es realmente válida ssi su cierre lo es). Entonces añadiendo su negación como axioma obtendríamos una extensión consistente S'que, por el lema anterior, tendrá una realización de una extensión de su lenguaje en la cual todo teorema de dicha extensión S' sería verdadero y en particular la negación de la expresión realmente válida; ello es una contradicción y, en consecuencia, no es posible que no sea teorema.

c.q.d.

### 3.6. Ejemplos de modelización.

Anteriormente hemos dado un procedimiento de decisisón para lenguajes sin letras de función, concretamente una adaptación del procedimiento de Kleene. El paso siguiente sería estudiar otro proceso de decisión como es la resolución; ello todavía no se ha realizado pero esperamos que plantee pocos problemas sin embargo queremos poner algún ejemplo de como aplicar los sistemas anteriores a la representación del conocimiento. En particular vamos ha desarrollar el acertijo del "consejero sabio", traemos este ejemplo en concreto por haber sido tratado como por distintos autores [Konol. 84] [Far. 85] y mostrar como este tipo de lenguajes podría ser una alternativa para Prolog modales (o Molog como prefiere llamarlo Fariñas).

El acertijo es muy conocido una de las versiones es la siguiente:

Un rey deseando saber cual de sus tres consejeros era el más sabio les reunió, pintádole a cada uno una mancha en la frente diciéndoles tan sólo que al menos una de ellas era de color blanco y preguntándoles a continuación si alguno de ellos era capaz de decir si la suya era de color blanco. El primero tras reflexionar contesta que no lo sabe el segundo contesta de igual forma y el tercero asegura que sabe que la suya es blanca.

El problema es demostrar que el tercer consejero tenía razón. Naturalmente el problema es mucho más sencillo si se supone que sólo hay dos consejeros, hemos resuelto primeramente este caso por simplicidad; de hecho se puede resolver escribiendo una serie de axiomas y procediendo a deducir a partir de ellos, pero hemos preferido presentar (por más sugestiva) como se haría la demostración utilizando el principio de resolución. Para el caso de dos consejeros se necesitan seis axiomas que especifican la forma de razonar de los consejeros. Se supondrá que $K(x,\alpha)$ significa "El consejero x conoce a ciencia cierta el hecho representado por $\alpha$", mientras que $A(x)$ significará "el consejero x tiene una mancha blanca". Los axiomas son bastánte intuitivos, pero han sido escritos simplemente por el orden en que son usados por lo que quizas a primera vista desconcierten un poco, probablente sean más sencillos de entender empezando por el último; por ejemplo el sexto afirma que el segundo consejero sabe que el primer consejero sabe que bien él mismo o bien el segundo tienen una mancha blanca. El quinto axioma afirma que el segundo consejero sabe que el primer consejero no sabe si ek mismo tiene una mancha blanca, etc.

El caso de los tres consejeros es algo más complicado, se necesitan dieciseis axiomas para caracterizar la situación, mejor dicho para caracterizarla lo suficiente como para deducir que el tercero sabe que tiene una mancha blanca sin embargo es igualmente intuitivo.

He aquí las soluciones:

a) El caso de dos consejeros:

1º) $K[x,\alpha] \leftarrow K[x,K[y,\alpha]]$

2º) $K[x,\alpha] \leftarrow K[x,\alpha \vee \beta], K[x,\neg\beta]]$

3º) $K[s_2, K[s_1,A(s_2] \vee K[s_1,\neg a(s_2)]] \leftarrow$

4º) $K[x,\neg K[y,\alpha]] \leftarrow K[x,\neg K[y,\beta]],K[x,K[y,\beta \leftarrow \alpha]]$

5º) $K[s_2,\neg K[s_1,A(s_1)]] \leftarrow$

6º) $K[s_2,K[s_1,A(s_1) \leftarrow \neg A(s_2)]]$

El "goal" es:

$\leftarrow K[s_2, A(s_2)]$

Vamos a ir resolviendo por orden con todas las claúsulas de la primera a la última:

$\leftarrow K[s_2,K[y,A(s_2)]]$

$\leftarrow K[s_2 ,K[y,A(s_2)]\vee\beta], K[s_2,\neg\beta]$

$\leftarrow K[s_2, \neg K[s_1,A(s_2]]$

$\leftarrow K[s_2, \neg K[s_1,\beta]],K[s_2, K[s_1,\beta \leftarrow A(s_2)]]$

$\leftarrow K[s_2, K[s_1, A(s_1) \leftarrow \neg A(s_2)]]$

Que con la sexta da la claúsula vacía.

b) El caso de tres consejeros:

1º) $K[x,\alpha] \leftarrow K[x,K[y,\alpha]]$

2º) $K[x,K[y,\alpha]] \leftarrow K[x,K[y,\alpha]\vee\beta], K[x,\neg\beta]$

3º) $K[s_3, K[s_2,A(s_3)] \vee K[s_2,\neg A(s_3)]] \leftarrow$

4º) $K[x,\neg K[y,\neg\beta]] \leftarrow K[x, K[y,\alpha\vee\beta]], K[x,\neg K[y,\alpha]]$

5º) $K[s_3,\neg K[s_2,A(s_2)]] \leftarrow$

6º) $K[x,K[y,\alpha]] \leftarrow K[x,K[y,K[z,\alpha]]]$

7º) $K[x,K[y,K[z,\alpha\vee\beta]]] \leftarrow K[x,K[y,K[z,\alpha]\vee K[z,\beta]]]$

8º) $K[x,K[y,\alpha\vee\beta]] \leftarrow K[x,K[y,\Gamma\vee\alpha]], K[x,K[y,\neg\Gamma\vee\beta]]$

9º) $K[s_3, K[s_2,K[s_1,\neg A(s_2)]] \vee K[s_1, A(s_2)]]] \leftarrow$

10º) $K[x,K[y,\alpha\vee\beta]] \leftarrow K[x,K[\alpha\vee\neg\Gamma]], K[x,K[y,\beta\vee\Gamma]]$

11º) $K[s_3, K[s_2,K[s_1, A(s_3)] \vee K[s_1, \neg A(s_3)]] \leftarrow$

12º) $K[x,K[y,\neg K[z,\alpha]\vee\neg K[z,\beta]]] \leftarrow K[x,K[y,\neg K[z,\alpha\cap\beta]]]$

13º) $K[x,K[y,\neg K[z,\neg\alpha\cap\neg\beta]]] \leftarrow K[x,K[y,\neg K[z,\neg(\alpha\vee\beta)]]]$

14º) $K[x,K[y,\neg K[z,\neg\beta]]] \leftarrow K[x,K[y,K[z,(\alpha\vee\beta)]]], K[x,K[y,\neg K[z,\alpha]]]$

15º) $K[s_3, K[s_2,\neg K[s_1,A(s_1)]]] \leftarrow$

16º) $K[s_3, K[s_2,\neg K[s_1,A(s_1)\vee A(s_2)\vee A(s_3)]]] \leftarrow$

Igual que en el caso anterior, vamos a ir resolviendo por orden las claúsulas de la primera a la última:

El "goal" es:

$\leftarrow K[s_3,A(s_3)]$

$\leftarrow K[s_3,K[y,A(s_3)]]$

$\leftarrow K[s_3,K[y,A(s_3)]\vee\beta], K[s_3,\neg\beta]$

$\leftarrow K[s_3,\neg K[s_2,\neg A(s_3)]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\alpha\vee A(s_3)]] \leftarrow K[s_3, \neg K[s_2,\alpha]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,A(s_2)\vee A(s_3)]] \leftarrow$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,K[z,A(s_2)\vee A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,K[z,A(s_2)]\vee K[z,A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\Gamma \vee K[z,A(s_2)]]] \vee K[s_3,K[s_2,\neg\Gamma \vee K[z,A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\neg A(s_2)] \vee K[s_1,A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\neg A(s_2)] \vee \neg\Gamma]],K[s_3,K[s_2,K[s_1,A(s_3)] \vee \Gamma]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\neg A(s_2)] \vee \neg ,K[s_1,\neg A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\neg A(s_2)] \cap \neg A(s_3)]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\neg (A(s_2)] \vee A(s_3))]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\alpha \vee A(s_2)] \vee A(s_3)]]]$, $K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,\alpha]]]$

$\leftarrow K[s_3,K[s_2,\neg K[s_1,A(s_1) \vee A(s_2)] \vee A(s_3)]]]$

Que con la decimo sexta dá la claúsula vacía.

De hecho la solución es tan parecida a un programa Prolog que es fácil su implementación en éste lenguaje. Los cambios que es necesario introducir no son conceptuales sino de control del proceso de búsqueda para evitar que por ejemplo se intente resolver siempre el primer aximoa con sigo mismo. El texto del programa y de la solución generada son los siguientes:

```
com -> know(sc,aa(sc),nil);

know(sc,dis(know(sb,aa(sc)),know(sb,no(aa(sc)))),l) ->;

know(sc,no(know(sb,aa(sb))),l) ->;

know(sc,know(sb,know(sa,dis(aa(sa),dis(aa(sb),aa(sc))))),l)->;

know(sc,know(sb,dis(know(sa,no(aa(sb))),know(sa,aa(sb)))),l) ->
```

```
know(sc,know(sb,dis(know(sa,aa(sc)),know(sa,no(aa(sc))))),l) ->;

know(sc,know(sb,no(know(sa,aa(sa)))),l) ->;

know(x,know(y,dis(no(know(z,a)),no(know(z,b)))),l) ->
    no-cic(reg1,l)
    know(x,know(y,no(know(z,conj(a,b)))),reg1.l);

know(x,know(y,no(know(z,no(b)))),l) ->
    no-cic(reg2,l)
    know(x,know(y,no(know(z,a))),reg2.l)
    know(x,know(y,know(z,dis(a,b))),reg2.l);

know(x,no(know(y,no(b))),l) ->
    no-cic(reg3,l)
    know(x,no(know(y,a)),reg3.l)
    know(x,know(y,dis(a,b)),reg3.l);

know(x,know(y,know(z,dis(a,b))),l)->
    no-cic(reg4,l)
    know(x,know(y,dis(know(z,a),know(z,b))),reg4.l);

know(x,know(y,no(know(z,conj(no(a),no(b))))),l) ->
    no-cic(reg5,l)
    know(x,know(y,no(know(z,no(dis(a,b))))),reg5.l);

know(x,know(y,dis(know(n,m),know(n',m'))),l) ->
    no-cic(reg6,l)
    know(x,know(y,dis(g,know(n,m))),reg6.l)
    know(x,know(y,dis(no(g),know(n',m'))),reg6.l);

know(x,know(y,dis(a,know(n',m'))),l) ->
    no-cic(reg7,l)
    know(x,know(y,dis(know(n',m'),g)),reg7.l)
    know(x,know(y,dis(a,no(g))),reg7.l);
```

```
     know(sc,know(sb,dis(n,m)),l) ->
         no-cic(reg8,l)
         know(sc,know(sb,know(sa,dis(n,m))),reg8.l);

     know(x,know(y,a),l) ->
         no-cic(reg9,l)
         know(x,dis(know(y,a),b),reg9.l)
         know(x,no(b),reg9.l);

     know(x,a,l) ->
         no-cic(reg10,l)
         know(x,know(y,a),reg10.l);

     no-cic(x,x.l) -> /fallo;
     no-cic(x,l) ->;

     ;

>com;

(1) know(sc,aa(sc))
    si (2) por aplicacion de la regla reg10

(2) know(sc,know(sb,aa(sc)))
    si (3) y (4) por aplicacion de la regla reg9

(3) know(sc,dis(know(sb,aa(sc)),know(sb,no(aa(sc)))))
    axioma

(4) know(sc,no(know(sb,no(aa(sc)))))
    si (5) y (6) por aplicacion de la regla reg3

(5) know(sc,no(know(sb,aa(sb))))
    axioma

(6) know(sc,know(sb,dis(aa(sb),aa(sc))))
    si (7) por aplicacion de la regla reg8
```

```
(7) know(sc,know(sb,know(sa,dis(aa(sb),aa(sc)))))
    si (8) por aplicacion de la regla reg4

(8) know(sc,know(sb,dis(know(sa,aa(sb)),know(sa,aa(sc)))))
    si (9) y (10) por aplicacion de la regla reg6

(9) know(sc,know(sb,dis(know(sa,no(aa(sb))),know(sa,aa(sb)))))
    axioma

(10) know(sc,know(sb,dis(no(know(sa,no(aa(sb)))),know(sa,aa(sc)))))
     si (11) y (12) por aplicacion de la regla reg7

(11) know(sc,know(sb,dis(know(sa,aa(sc)),know(sa,no(aa(sc))))))
     axioma

(12) know(sc,know(sb,dis(no(know(sa,no(aa(sb)))),no(know(sa,no(aa(sc)
     si (13) por aplicacion de la regla reg1

(13) know(sc,know(sb,no(know(sa,conj(no(aa(sb)),no(aa(sc)))))))
     si (14) por aplicacion de la regla reg5

(14) know(sc,know(sb,no(know(sa,no(dis(aa(sb),aa(sc)))))))
     si (15) y (16) por aplicacion de la regla reg2

(15) know(sc,know(sb,no(know(sa,aa(sa)))))
     axioma

(16) know(sc,know(sb,know(sa,dis(aa(sa),dis(aa(sb),aa(sc))))))
     axioma

{}
```

El punto quizás más interesante de este ejemplo es que es posible (de hecho es necesario) especificar concretamente que es lo que el tercer consejero sabe acerca de la capacidad de razonar de los otros dos consejeros, sería bastante sencillo el intentar modelizar el problema de los tres "no excesivamente sabios" consejeros; es decir, el limitar como hace Konolige las capacidades deductivas de algunos de ellos,; la idea sería proporcionar un conjunto incompleto de reglas deductivas, por ejemplo se les podría proporcionar sólo la capacidad para resolver silogismos en bárbara, con axiomas de la siguiente forma:

$$K[s,\Lambda x(A(x)\rightarrow C(x))]\leftarrow K[s,\Lambda x(A(x)\rightarrow B(x))],K[s,\Lambda x(B(x)\rightarrow C(x))]$$

De hecho el otro punto curioso es que hay que razonar no sólo acerca de lo que se conoce si no acerca de lo que no se conoce si se sabe cuales son los datos de partida de algún sujeto es posible, repitiendo el razonamiento predecir a que conclusiones puede llegar; como ejemplifica este problema el camino inverso no es tan sencillo sabiendo cuales son las conclusiones a las que ha llegado o mejor dicho a las que no ha podido llegar deducir de donde ha partido.

No queremos dejar pasar esta opurtunidad para decir que creemos que una posible aplicación de este tipo de sistemas puede ser el análisis de juegos complejos (como pudiera ser el ajedrez), donde no es conocida aunque exista una solución algorítmica. El problema de estos juegos radica en que el árbol de búsqueda se hace demasiado grande como para examinar todas las ramas, la típica solución heurística consiste en asignar una función de evaluación y aplicar algún algoritmo de poda del árbol. Aún así apenas se pueden examinar unas pocas jugadas; otro tipo de heurística podría venir dado por un sistema deductivo acerca de la forma de pensar del otro jugador; situación típica las celadas, si nos enfrentamos con un jugador novato, calculamos que no es capaz de deducir las consecuencias de sus actos y que a pesar de que el movimiento que hagamos no sea teóricamente el óptimo puede resultar más efectivo el realizarlo pero sólo porque podemos razonar acerca de las limitaciones de la forma de pensar del otro jugador, lo que denominaríamos el "estilo". Una de las reglas del ajedrez entre jugadores expertos es la de intentar llevar al contrario a situaciones en las cuales uno se sienta cómodo; por ejemplo, a partidas violentas si se trata de un jugador tránquilo, en la hipótesis de que razonará peor en dichas situaciones del tablero (aunque le sean ventajosas). Una táctica similar era de hecho empleada por Lasker: no jugar inicialmente el mejor movimiento para tentar al contrario a un ataque prematuro.

## Conclusiones

Como ya hemos dicho, el principal objetivo de este trabajo es investigar las ventajas y las facilidades que podría proporcionar, el considerar un universo formado, no sólo por elementos individuales, sino también por las propias expresiones del lenguaje.

Como principales conclusiones del mismo podemos extraer las siguientes:

1ª. La posibilidad de colapsar la jerarquía tarskiana de lenguaje objeto, meta-lenguaje, meta-meta-lenguaje, etc., en un único lenguaje con niveles implicitos. Además, hemos visto que es posible hacerlo dentro de una lógica bivalente, construyendo unos sistemas minimamente adecuados para hablar del concepto de verdad en el siguiente sentido: gran parte de las propiedades de dicho concepto se pueden deducir dentro del propio sistema, sistema que admite por ejemplo un teorema de deducción y otras propiedades clásicas. El gran inconveniente con el que nos hemos encontrado es el de no disponer de procedimientos de decisión.

2ª. Simplificando los sistemas precedentes, y realizando algunas modificaciones semánticas, hemos construido una lógica válida para predicados intensionales, tales como "creer", "pensar", "saber", etc.; de hecho, predicados como "es necesario", "es posible",que son propios de las lógicas modales, pueden ser perfectamente englobados en ella. Estos sistemas no apelan a la interpretación de los mundos posibles pues según dijimos, el significado intuitivo mas adecuado es el de asociarlos a estados mentales, es decir, a las relaciones que el sujeto establece entre los diferentes conceptos y juicios. Entonces resulta curioso que aunque no apelamos a mundos posibles, sí tenemos que apelar a otros posibles estados mentales para poder establecer el teorema de completitud. No obstante, no se trata de una analogia muy precisa con la interpretación de los "mundos posibles", pues no se supone ninguna relación de accesibilidad entre los distintos "estados mentales". Lo mas interesante de estos sistemas es que su axiomatización es muy sencilla y casi constituye una lógica clásica salvo por las restricciones que se añaden en cuanto a la sustitutividad de términos. Ello permite desarrollarla de forma bastante paralela e incluso, como hemos visto, llegar a dar un teorema de completitud, y por lo tanto, a demostrar la decibilidad de este tipo de sistemas.

3ª. Las aplicaciones, si bien sólo se han esbozado, resultan entonces claras: deducción automática en situaciones en las cuales intervienen predicados intensionales, manejo de creencias, razonamiento sobre el conocimiento, etc.; y en particular, la modelización de juegos complejos para los cuales no se dispone de solución algorítmica conocida, puesto que razonar acerca de la forma en la cual el otro jugador aborda las distintas situaciones pudiera conducir a una poda del árbol de búsqueda, o bien, a la toma de decisiones más efectivas.

INDICE DE DEMOSTRACIONES

## Apéndice de demostraciones

### 1.3.15. Lema:

Sean v y w dos valoraciones que asignan a todas las variables presentes directamente en el término individual t [gramatical $\tau$] los mismos valores; entonces $v(t) = w(t)$; [$v(\tau) = w(\tau)$].

La prueba del lema es naturalmente por inducción; veamos primeramente el caso de los términos individuales:

a) Si el término es un nombre individual, entonces

$$v(n) = w(n) = n$$

ya que la valoración de cualquier nombre individual es dicho nombre individual.

b) Si el término es una variable x; entonces por hipótesis

$$v(x) = w(x)$$

ya que x está presente directamente en x.

c) Si $t_1, t_2, \ldots, t_m$ verifican el lema, y v y w son tales que asignan a las variables presentes directamente en:

$$f_n^m(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

los mismos valores, entonces, como las presentes directamente en cada $t_i$ ($1 \leq i \leq m$) son un subconjunto de las presentes en dicho término, se verificará para cualquiera de las $t_i$:

$$v(t_i) = w(t_i)$$

y por tanto,

$$v[f_n^m (t_1, t_2,\dots,t_m)] = \bar{f}_n^m[v(t_1),\dots,v(t_m)] =$$

$$= \bar{f}_n^m[w(t_1),\dots,w(t_m)] = w[f_n^m(t_1,\dots,t_m)]$$

Para los términos gramaticales la prueba es similar:

a) Si se trata de una expresión $\xi$ entonces $v(\xi) = w(\xi)$ ya que (lema 1.2.5.) la valoración de cualquier expresión es dicha expresión.

b) Si se trata de una variable gramatical $\alpha$, al estar $\alpha$ presente directamente en $\alpha$ por hipótesis $v(\alpha) = w(\alpha)$.

c) Suponiendo que $\tau_1$ y $\tau_2$ verifican el lema y que v y w asignan a las variables presentes directamente en $\tau_1$ y $\tau_2$ las mismas expresiones entonces:

$$v(\neg\tau_1) = \neg v(\tau_1) = \neg w(\tau_1) = w(\neg\tau_1)$$

$$v(\tau_1 \to \tau_2) = v(\tau_1) \to v(\tau_2) = w(\tau_1 \to \tau_2)$$

$$v(\Lambda x\ \tau_1) = \Lambda x\ v(\tau_1) = w(\Lambda x\ \tau_1)$$

$$v(\Lambda\alpha\ \tau_1) = \Lambda\alpha\ v(\tau_1) = w(\Lambda\alpha\ \tau_1)$$

c.q.d.

1.3.16. Lema

Sean v y w dos valoraciones que asignen a todas las variables libres en una expresión $\xi$ los mismos valores; entonces v satisface $\xi$ ssi w también la satisface.

Este lema también se demuestra por inducción; pero el proceso es un poco más complicado, puesto que la inducción debe realizarse de forma doble: sobre la complejidad (número de conectivas y /o cuantificadores) y sobre el grado de la expresión. Veamos primeramente el caso n=0 ($\xi \varepsilon E_1$).

- Si es una expresión atómica:

$F_r^{p,q}$ $(t_1,\ldots,t_p;\ \tau_1,\ldots,\tau_q)$; con $F_r^{p,q} \neq V$

Entonces v satisfará $\xi$ ssi se verifica

$\bar{F}_r^{p,q}$ $(v(t_1),\ldots\ \ldots,v(t_p);\ v(\tau_1),\ldots,v(\tau_q))$.

Pero en virtud del lema anterior se tendrá que $v(t_i) = w(t_i)$ y que $v(\tau_j) = w(\tau_j)$ por asignar v y w a las variables libres los mismos valores y estas son precisamente las variables que aparecen directamente en dichos términos, y el sublema anterior nos asegura que se verifican las igualdades mencionadas. Por tanto v satisfará $\xi$ ssi se verifica:

$\bar{F}_r^{p,q}$ $(w(t_1),\ldots\ldots,w(t_p);\ w(\tau_1),\ldots,w(\tau_q))$

es decir ssi w satisface $\xi$.

Paso de inducción: supuesto que $\xi_1$ y $\xi_2$ verifican el lema, entonces:

- Si v satisface $\xi_1$ ssi w satisface $\xi_1$ se tendrá que v satisfará $\neg\xi_1$, ssi w satisface $\neg\xi_1$.

- Si v satisface $\xi_1$ ssi w satisface $\xi_1$ y v satisface $\xi_2$ ssi w satisface $\xi_2$ entonces es evidente que v satisfará $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ ssi se cumple que w satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$.

- Supongamos que $\xi$ sea de la forma $\Lambda x\ \xi_1$. Hay dos casos en dos que al lema no se satisfacería.

I) Que v satisfaciese $\Lambda x\ \xi_1$ pero w no.
II) Que w satisfaciese $\Lambda x\ \xi_1$ pero v no.

Supongamos que se diese I; entonces existiría una valoración w'x-equivalente a w tal que w' no satisfacería $\xi_1$. Consideremos la valoración v' tal que v'(x) = w'(x). Por ser x-equivalente a v' debe satisfacer $\xi_1$; pero por otra parte, si v y w asignan a todas las variables libres en $\Lambda x\ \xi_1$ los mismos valores, v' y w' asignan a todas las variables libres en $\xi_1$ los mismos valores; por lo que la hipótesis de inducción obliga a que una satisfaga $\xi_1$ ssi otra tambien lo satisface. Esto contradice lo dicho anteriormente y I no se puede dar.

De forma análoga se prueba que II tampoco se puede dar.

- Supongamos que $\xi$ sea de la forma $\Lambda\alpha\xi_1$.

La demostración es idéntica al caso anterior pero donde pone x poniendo $\alpha$. Por ello no la repetimos.

Con ello el caso n=0 esta completo.

Supongamos que hemos realizado la demostración hasta n=m y demostremoslo para n=m+1. Por inducción como siempre.

Paso base:

- $\xi$ es de la forma $F_r^{p,q}$ $(t_1, t_2,...,t_p; \tau_1, \tau_2,...,\tau_q)$ con $F_r^{p,q} \neq V$; este caso pertenece a n=0 y ya ha sido tratado. No hay pues nada que demostrar.

- $\xi$ es de la forma $V(\tau)$. Las variables libres en $\xi$ son las presentes directamente en $\tau$ con lo que $v(\tau) = w(\tau)$. v satisfará $\xi$ ssi se verifica $\bar{V}(v(\tau))$, w satisfará $\xi$ ssi se verifica $\bar{V}(w(\tau))$.

Paso inducción:

Si $\xi$ es de la forma $\neg\xi_1$, $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ o $\Lambda x\xi_1$, los lemas 1.3.10, 1.3.11 y 1.3.12 nos reducen la demostración de estos casos a la de los casos correspondientes en n=0, pues las condiciones en las que una valoración satisface una expresión son las mismas en estos casos que en n=0.

Asi pues, nuestro único problema es el caso en el que $\xi$ sea de la forma $\Lambda\alpha\ \xi_1$.

Si $\xi \not\in E_{n+1} - E_n$ (es decir $\xi \in E_n$) no hay nada que demostrar, pues por hipótesis de inducción (sobre n) habrá sido tratado en un paso anterior.

Entonces, se pueden dar dos casos:

a) $v \varepsilon G_n\ [K\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}]$ (y naturalmente tambien $w\ \varepsilon G_n\ [K\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}]$, pues asignan a todas las variables libres en $\Lambda\alpha\ \xi_1$, y por lo tanto, tambien a las críticas los mismos valores).

Hay dos casos en los cuales en lema no se satisfaría:

I) Que v satisfaga $\Lambda\alpha\ \xi_1$, y que w no satisfaga $\Lambda\alpha\ \xi_1$

II) Que w satisfaga $\Lambda\alpha\ \xi_1$, y que v no satisfaga $\Lambda\alpha\ \xi_1$

Supongamos que se diese I. En tal caso existiría una valoración w' $\alpha$-equivalente a w que no satisfaría $\xi_1$ y tal que $w' \varepsilon$ a $G_n\ [K\{\xi_1\}]$.

Consideremos la valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v'(\alpha) = w'(\alpha)$. Naturalmente que $v'\ \varepsilon$ a $G_n[K\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}]$, puesto que es $\alpha$-equivalente a $v\ \varepsilon$ a $G_n[K\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}]$ y $\alpha$ no puede ser crítica en $\Lambda\alpha\xi_1$. Pero además en caso de ser crítica en $\xi_1$ w' le asignaría una expresión de $E_n$, y eso mismo haría v'; por lo tanto $v' \varepsilon$ a $G_n[K\{\xi_1\}]$. En consecuencia v' debe de satisfacer $\xi_1$, al satisfacer v $\Lambda\alpha\ \xi_1$.

Pero por otra parte si v y w asignan a las variables libres en $\Lambda\alpha\ \xi_1$ los mismos valores, entonces v' y w' asignan a las variables libres en $\xi_1$ los mismos valores, y por hipòtesis de inducción una debería de satisfacer $\xi_1$ ssi la otra la satisface. Esto contradice lo dicho anteriormente y por lo tanto I no se puede dar. Analogamente se demuestra que II tampoco se puede dar.

b) v $\notin$ $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$. Entonces existirá un s>n tal que w $\varepsilon(G_s - G_{s-1})$ [K $\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}$]; naturalmente que w $\varepsilon$ a $(G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\alpha\ \xi_1\}]$, pues asignan a las variables libres (entre ellas las críticas) las mismas expresiones. Pero ahora estamos en el caso b.2.2 de la definición inductiva de cuando una valoración satisface una expresión y se tendrá (tengase en cuenta que $\Lambda\alpha\ \xi_1 \varepsilon E_s$) que v satisfará $\Lambda\alpha\ \xi_1$ ssi toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_s$ $[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$ y:

w satisfará $\Lambda\alpha\ \xi_1$ ssi toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_s$ $[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$.

Con lo que el resto de la demostración es como en el apartado a) precedente pero cambiando n por s. Ello finaliza la demostración inductiva de 1.3.16.

<u>Teorema 2.2.2</u>

Todas las instancias de los esquemas axiomáticos A.1-A.11 son logicamente auténticas salvo (posiblemente) aquellas instancias de A.5.II en las que $\alpha$ sea crítica y $\tau$ no sea una expresión, las cuales al menos son logicamente verdaderas.

Dado que son bastantes esquemas axiomáticos vamos a ir viendo caso por caso; los tres primeros son muy sencillos:

A.1, A.2, A.3; Lema:

Todas las instancias de los tres primeros esquemas axiomáticos son logicamente auténticas. Este lema se deja como ejercicio ya que es extremadamente sencillo, al fin y al cabo se trata de las tautologías del cálculo de proposiciones y los lemas 1.3.10, 1.3.11 y 1.3.12 nos permiten demostrarlas tal y como se hace normalmente.

A.4 Lema:

Todas las instancias del esquema axiomático A.4 (en sus dos versiones I y II son logicamente auténticas:

La demostración es también muy sencilla en virtud de los lemas 1.3.12 y 1.3.13; empecemos por la versión I:

A.4.I: $\Lambda x\xi \to \xi$ (no estando x libre en $\xi$); la única forma en como una valoración podría no satisfacer esta expresión es que satisfaciese $\Lambda x\xi$ y no satisfaciese $\xi$, pero si satisface $\Lambda x\xi$ ello significa que toda valoración x-equivalente a v satisface $\xi$, luego la propia v debe satisfacer $\xi$ contrariamente a lo dicho antes.

A.4.II: $\Lambda\alpha\xi \to \xi$ (no estando libre $\alpha$ en $\xi$). Vamos a demostrar un sublema que nos sera, además de útil en este caso, muy útil más adelante.

A.4.II.1 Sublema:

Una valoración v satisface una expresión de la forma $\Lambda\alpha\xi$ tal que $\alpha$ no sea crítica en $\xi$ ssi toda valoración $\alpha$-equivalente a v satisface $\xi$.

La prueba es por inducción sobre el grado de la expresión:

$\Lambda\alpha\xi\ \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$

- Si n=0; $\Lambda\alpha\xi\ \varepsilon E_1$; no hay nada que demostrar, pues es exactamente lo que especifica la definición inductiva de satisfacción.

- Supongamos pues que $\Lambda\alpha\xi\ \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$ con $n\neq 1$.

Si $\Lambda\alpha\xi$ careciese de variables críticas, entonces, dado que toda valoración v pertenece trivialmente a $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi\}]$ entonces v satisfará esta expresión ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi\}]$ satisface $\xi$; pero si $\Lambda\alpha\xi$ carece de variables críticas y $\alpha$ no es crítica en $\xi$ la condición $v'\varepsilon Gn[K\{\xi\}]$ es redundante pues toda valoración la satisface; así pues v satisfará $\Lambda\alpha\xi$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente a v satisface $\xi$.

Si $\Lambda\alpha\xi$ posee variables críticas habrá entonces varios posibles casos; pero obsérvese que por no ser crítica $\alpha$ en $\xi$ se tiene $K\{\xi\} = K\{\Lambda\alpha\xi\}$ y por tanto, que si $v\varepsilon G_s[K\{\Lambda\alpha\xi\}]$ y v' es $\alpha$-equivalente entonces $v'\varepsilon\ G_s\ [K\{\xi\}]$.

Además, tengase en cuenta que necesariamente hay un $m\neq 1$ tal que $v\varepsilon(G_m - G_{m-1})\ [K\{\Lambda\alpha\xi\}]$, por lo que los casos que se plantean son los siguientes:

1) $n<m$

$\Lambda\alpha\xi_1\varepsilon E_m$; en cuyo caso estamos en el apartado b.2.2 del proceso de inducción y en virtud de la observación anterior, la condición de este apartado se reduce a que v satisfará $\Lambda\alpha\xi$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente satisface $\xi$.

2) $n\neq m$

$\Lambda\alpha\xi\ \varepsilon(E_{n+1} - E_n)$; $v\varepsilon G_m[K\{\Lambda\alpha\xi\}]$ pero como $n\neq m$, esto significa que si $v\varepsilon G_m(A)$ se verificara que $v\varepsilon G_n(A)$; entonces $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi\}]$ y estamos en el apartado a. de la definición inductiva y la observación anterior se reduce igualmente a que v satisfará $\Lambda\alpha\xi$ ssi toda valoración v' $\alpha$-equivalente satisface $\xi$.

En virtud de este sublema podemos demostrar ya A.4.II: la única forma en cómo v podría no satisfacer $\Lambda\alpha\xi \to \xi$ es que satisfaciese $\Lambda\alpha\xi$ y no satisfaciese $\xi$, pero en tal caso toda v' $\alpha$-equivalente a v satisfaría $\xi$; entre ellas se encuentra la propia v y por tanto v debe satisfacer $\xi$ contrariamente a lo dicho antes.

A.5.I Lema:

Todas las instancias de la primera versión de A.5 son logicamente auténticas.

Este lema no tiene gran dificultad, pues no supone más que repetir las ideas que conducen a su demostración en el cálculo de predicados pero en una situación un poco más complicada (lo cual lo hace algo más largo).

Para demostrar el lema necesitamos varios sublemas:

A.5.I.1 Sublema:

Sea v una valoración cualquiera y sea v' la valoración x-equivalente a v tal que v'(x) = v(t); entonces, para todo término individual u se verifica que:

$$v'(u) = v(u_{x/t})$$

siendo $u_{x/t}$ el término que resulta de sustituir las apariciones directas de x en u por t.

La demostración es inmediata por inducción sobre la complejidad de los términos individuales (no la damos, por ser algo bien conocido del cálculo de predicados).

A.5.I.2 Sublema:

Sea $t$ un término individual que no contiene la variable $x$ directamente y sean $v$ y $w$ dos valoraciones cualesquiera $x$-equivalentes, entonces:

$$v(t) = w(t)$$

Analogamente admite una prueba elemental por inducción que no damos.

A.5.I.3 Sublema:

Si $v$ y $w$ son dos valoraciones $x$-equivalentes, entonces para todo término gramatical se verifica:

$$v(\tau) = w(\tau)$$

Este sublema es evidente dado que $v$ y $w$ asignan a las variables gramaticales las mismas expresiones, y que la valoración de cualquier expresión es dicha expresión. En base a ello se puede dar una sencilla prueba por inducción si se desea, pero nosotros la omitiremos.

A.5.I.4 Sublema:

Sean $v$ y $v'$ dos valoraciones (como en el sublema A.5.I.1) $x$-equivalentes tales que $v'(x) = v(t)$. Si $t$ esta libre para $x$ en $\xi(x)$ entonces $v'$ satisface $\xi(x)$ ssi $v$ satisface $\xi(t)$.

La demostración se realiza por un doble proceso de inducción: sobre el número de conectivas y/o cuantificadores que contiene la expresión y sobre el grado de la misma. Sea $\xi(x)\ \varepsilon E_{n+1}$.

Caso $n=0$: $\xi(x)\ \varepsilon E_1$. La demostración procede ahora por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores que contiene la expresión.

Paso base:

$\xi(x)$ es una expresión atómica:

$$F_r^{p,q}(t_1,.....,t_p;\ \tau_1,....,\tau_q)$$

Veamos en que condiciones satisface v la expresión $\xi(\tau)$:

$$[F_r^{p,q}(t_1,...,t_p;\ \tau_1,...,\tau_q)]_{x//t}$$

Donde $x//t$ indica que sustituimos todas las apariciones libres de x por t en dicha expresión. Como una aparición de x en un término gramatical no es una aparición libre sino opaca y además, por no haber ningún cuantificador $\wedge x$ a la izquierda, las apariciones libres de x en los términos individuales son precisamente las apariciones directas en dichos términos; se tiene que la expresión anterior es:

$$F_r^{p,q}(t_{1x/t},t_{2x/t},...,t_{px/t};\ \tau_1,\ \tau_2,...,\tau_q)$$

v satisfará esta expresión ssi se verifica:

$$\bar{F}_r^{p,q}(v(t_{1x/t}),....,v(t_{px/t});\ v(\tau_1),...,v(\tau_q)$$

Pero teniendo en cuenta los sublemas A.5.I.1 y A.5.I.3, esto significa que v satisfará $\xi(t)$ ssi se verifica:

$$\bar{F}_r^{p,q}(v'(t),...,v'(t_p);\ v'(\tau_1),...,v'(\tau_q))$$

es decir, ssi v' satisface $\xi(x)$.

Inducción:

Se supone que el lema se verifica para toda valoración y toda expresión con menos de m conectivas y/o cuantificadores.

a) Si v' satisface $\xi(x)$ ssi v satisface $\xi(t)$, entonces v' satisfará $\neg\xi(x)$ ssi v satisface $\neg\xi(t)$.

b) Si v' satisface $\xi_1(x)$ ssi v satisface $\xi_1(t)$ y v' satisface $\xi_2(x)$ ssi v satisface $\xi_2(t)$ entonces, es evidente que v' satisfará $\xi_1(x)\rightarrow\xi_2(x)$ ssi v satisface $\xi_1(t)\rightarrow\xi_2(t)$.

c) Supongamos que v' satisfaga $\xi(x)$ ssi v satisface $\xi(t)$. En este punto vamos a demostrar que v' satisfará $[\Lambda y\ \xi(x)]$ ssi v satisface la expresión $[\Lambda y\ \xi_1(x)]_{x//t}$, (donde x//t indica que sustituimos las apariciones libres de x por t).

- En caso de que y≡x tendremos que $[\Lambda x\xi(x)]_{x//t} = \Lambda x\xi(x)$; ya que en tal caso no hay apariciones libres de x; v' satisfará $\Lambda x\xi(x)$ ssi toda valoración x-equivalente a v' satisface $\xi(x)$. Analogamente v satisfará $\Lambda x\xi(x)$ ssi toda valoración x-equivalente a v satisface $\xi(x)$. Pero estas dos condiciones son la misma, puesto que por ser v y v' x-equivalentes entre si las dos clases de equivalencia coinciden. Asi pues, una satisfará $\Lambda x\xi(x)$ ssi la otra también la satisface.

- Supongamos que y≢x, en tal caso v' satisfará $\Lambda y\xi(x)$ ssi toda valoración y-equivalente a v' satisface $\xi(x)$. Analogamente v satisfará $\Lambda y\xi(t)$ ssi toda valoración y-equivalente a v satisface $\xi(t)$. Queremos demostrar que no se pueden dar los siguientes casos:

I) Que v' satisfaga $\Lambda y\xi(x)$ y que v no satisfaga $\Lambda y\xi(t)$.

II) Que v' no satisfaga $\Lambda y\xi(x)$ y que v' satisfaga $\Lambda y\xi(t)$.

Supongamos que se diese el caso I. Entonces por no satisfacer v la expresión $\Lambda y\xi(t)$, debe de haber una valoración w y-equivalente a v que no satisfaga $\xi(t)$ consideremos por otra parte la valoración w' y-equivalente a v' y tal que w'(y) = w(y). Dicha valoración debe satisfacer $\xi(x)$, puesto que v' satisface $\Lambda y\xi(x)$. Asi pues, se verifica:

1) Que $w$ y $w'$ son x-equivalentes.

2) Además $w'(x) = v'(x) = v(t)$.

Por otra parte, $t$ no puede contener directamente a la variable $y$, pues si lo hiciese no estaría libre para sustituir a $x$ en $\Lambda y\xi(x)$; y por el sublema 1.3.15, dado que $w$ y $v$ son y-equivalentes y $t$ no contiene directamente a $y$, se verifica:

$$v(t) = w(t)$$

por lo tanto se verifica:

$$w'(x) = w(t)$$

Con lo cual $w$ y $w'$ satisfacen la hipótesis de inducción son x-equivalentes y tales que $w(t) = w'(x)$. Asi pues una debería de satisfacer $\xi(t)$ ssi la otra satisface $\xi(x)$. Cosa que contradice lo dicho anteriormente. Por tanto, I no se puede dar.

Supongamos que se diese II. Si $v'$ no satisface $\Lambda y\xi(x)$ será porque hay una valoración y-equivalente a $v'$ que no satisface $\xi(x)$. Sea esta $w'$. Consideremos la valoración $w$ y-equivalente a $v$ y tal que $w(y) = w'(y)$, $w$ debe de satisfacer $\xi(t)$ por ser x-equivalente a $v$ y satisfacer $v$ $\Lambda y\xi(t)$.

Asi pues $w$ y $w'$ son dos valoraciones x-equivalentes tales que una satisface $\xi(t)$ y la otra no satisface $\xi(x)$.

Pero además se verifica que:

$$w'(x) = v'(x) = v(t)$$

y

$w(t) = v(t)$

ya que t no contiene directamente a y, siendo w y v y-equivalentes (sublema 1.3.15).

Asi pues w y w' verifican la hipótesis de inducción y debería satisfacer una $\xi(x)$ ssi la otra satisface $\xi(t)$; lo cual es una contradicción con lo dicho anteriormente. Es decir II no se puede dar; por tanto v satisface $\Lambda x\xi(t)$ ssi v' satisface $\Lambda x\xi(x)$.

d) Nos queda pues el último caso (dentro de n=0) para demostrar el lema demostrar que v satisface $\Lambda\alpha\xi(t)$ ssi v' satisface $\Lambda\alpha\xi(x)$. Hay de nuevo dos casos en los que el lema podría no cumplirse:

I) Que v' satisfaciese $\Lambda\alpha\xi(x)$, pero que v no satisfaciese $\Lambda\alpha\xi(t)$.

II) Viceversa: que v' no satisfaga $\Lambda\alpha\xi(x)$ pero que v satisfaga $\Lambda\alpha\xi(t)$.

Supongamos que se diese I debe entonces existir una valoración w, $\alpha$-equivalente a v, que no satisfaga $\xi(t)$.

Consideremos la valoración w' $\alpha$-equivalente a v' tal que $w'(\alpha) = w(\alpha)$.

Naturalmente que $w'(x) = v'(x) = v(t) = w(t)$; ya que los términos individuales no se ven afectados por una $\alpha$-equivalencia.

Pero entonces w y w' son x-equivalentes y verifican $w'(x)=w(t)$; es decir satisfacen los requisitos de la hipótesis de inducción y por tanto deberían de cumplir que una satisfaciese $\xi(x)$ ssi la otra satisface $\xi(t)$. Esto es una contradicción con lo dicho anteriormente y por tanto I no se puede dar.

Analogamente se demuestra que II no se puede dar.

Ello completa el proceso de inducción para el caso n=0.

Supongamos que hemos demostrado el lema hasta el caso n=m-1; debemos entonces demostrarlo para el caso n=m.

La demostración la haremos por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores que posea una expresión $\xi(x) \varepsilon E_{n+1}$.

Paso base

a) $\xi(x)$ es de la forma $F_r^{p,q}(t_1,....,t_p; \tau_1,...\tau_q)$. En este caso $\xi(x) \varepsilon E_1$ y esta posibilidad ha sido ya tratada en el paso base del caso n=0.

b) $\xi(x)$ es de la forma $V(\tau)$ con $\tau \varepsilon \Omega_n$. En tal caso una valoración v' satisfará esta expresión (lema 1.3.8) ssi se verifica $\bar{V}(v'(\tau))$.

Por otra parte x no aparece libre en esta expresión (sino todo lo más opaca, en caso de aparecer en $\tau$).

Asi pues $\xi(x)$ y $\xi(t)$ son la misma expresión $V(\tau)$. Por tanto v satisfará $\xi(t)$ ssi se verifica $\bar{V}(v(\tau))$. Pero (sublema A.5.I.3.) $v(\tau) = v'(\tau)$; luego v satisfará $\xi(t)$ ssi v' satisface $\xi(x)$.

Paso de inducción

Supuesto que el lema se verifica para toda valoración y toda expresión con menos de p conectivas y/o cuantificadores, hay que demostrarlo para expresiones con p+1 conectivas y/o cuantificadores. Los apartados en los que $\xi(x)$ sea de la forma a) $\neg\xi_1(x)$; b) $\xi_1(x) \rightarrow \xi_2(x)$ y c) $\Lambda y\, \xi_1(x)$; se demuestran de la misma forma que en el caso n=0 ya que los lemas 1.3.10, 1.3.11 y 1.3.12 nos reducen las condiciones en las cuales una valoración satisface una expresión de $E_{n+1}$ a las mismas condiciones que en los apartados correspondientes del caso n=0 ($E_1$).

Así pues, sólo hay que tratar el caso:

d) $\xi(x)$ es de la forma $\Lambda\alpha\xi_1(x)$.

En primer lugar si $\xi(x)\, \varepsilon E_n$, no hay nada que demostrar; pues por hipótesis de inducción se supone que el lema ha sido ya demostrado en un caso anterior; así pues supondremos que $\xi(x)\ \varepsilon\ E_{n+1} - E_n$ (y lo mismo ocurrirá con $\xi(t)$: $\xi(t)\ \varepsilon\ (E_{n+1} - E_n)$ naturalmente).

En segundo lugar si $\alpha$ no es crítica en $\xi_1$ el lema A.4.II.1 nos reduce la condición por la cual una valoración satisface una expresión a la condición del caso n=0 ($E_1$) y por lo tanto la misma demostración que en dicho caso será válida en este. Por tanto, podemos suponer que $\alpha$ es crítica en $\xi_1(x)$.

En tercer lugar al ser v y v' x-equivalentes, pertenecen exactamente a los mismos grados $G_s(A)$ ambas; ya que asignan a las variables gramaticales las mismas expresiones.

Supongamos en primer lugar que se da que $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(x)\}]$; llamando $A=K\{\Lambda\alpha\xi_1(t)\}=K\{\Lambda\alpha\xi_1(x)\}$ naturalmente $v'\varepsilon G_n(A)$.

Asi pues, en estas condiciones nos hallamos en el apartado a) de la definición inductiva de cuando una valoración satisface una expresión:

******

v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1(t)$ ssi toda valoración $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(t)\}]$ y $\alpha$-equivalente a v satisface $\xi_1(t)$.

Analogamente:

v' satisfará $\Lambda\alpha\xi_1(x)$ ssi toda valoración $w'\varepsilon G_n[K\{\xi_1(x)\}]$ y $\alpha$-equivalente a v' satisface $\xi_1(x)$.

Nótese que $K\{\xi_1(x)\} = K\{\xi_1(t)\} = B$ y B no es vacío (contiene al menos a $\alpha$).

Hay dos casos que deseamos demostrar que no se pueden dar.

I) Que v satisfaga $\Lambda\alpha\xi_1(t)$ y v' no satisfaga $\Lambda\alpha\xi_1(x)$.

II) Que v no satisfaga $\Lambda\alpha\xi_1(t)$ y v' satisfaga $\Lambda\alpha\xi_1(x)$.

Supongamos que se diese I; en tal caso existiría una valoración w' $\alpha$-equivalente a v' y perteneciente a $G_n(B)$ que no satisfaría $\xi_1(x)$. Consideremos la valoración w $\alpha$-equivalente a v y tal que $w(\alpha) = w'(\alpha)$. Por ser $\alpha$-equivalente a v atribuye a todas las variables gramaticales las mismas expresiones que v; por tanto (dado que $\alpha$ no es crítica en $\Lambda\alpha\xi_1(x)$) atribuirá a todas las variables críticas en esta expresión expresiones de $E_n$; por otra parte $B = A\cup\{\alpha\}$; pero $w(\alpha) = w'(\alpha)\ \varepsilon E_n$, por lo que $w\varepsilon G_n(B)$ y debe satisfacer $\xi_1(t)$.

Por otra parte, $w(t) = v(t) = v'(x) = w'(x)$; es decir, resumiendo, w y w' son dos valoraciones x-equivalentes tales que $w(t) = w'(x)$, luego por hipótesis de inducción una debe satisfacer $\xi(t)$ ssi la otra satisface $\xi(x)$, cosa que contradice lo dicho anteriormente, luego I no se puede dar y de forma similar se demuestra que II no se puede dar.

*****

Si $v \notin G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(t)\}]$ habrá una $s>n$ tal que $v\varepsilon(G_s - G_{s-1})[K\{\Lambda\alpha\xi_1(t)\}]$ y analogamente $v'\varepsilon(G_s - G_{s-1})[K\{\Lambda\alpha_1(x)\}]$; con lo cual, estamos en el caso b.2.2. de la definición inductiva (ya que $\Lambda\alpha\xi_1(t)\ \varepsilon E_s$ y $\Lambda\alpha\xi_1(x)\ \varepsilon E_s$); el resto de la demostración de que v y v' satisfacen el lema es idéntico a cómo se realizó anteriormente, cambiando unicamente s por n en los párrafos situados entre los asteriscos *****.

Ello completa la demostración por inducción del sublema A.5.I.4.

Habiendo demostrado ya el sublema A.5.I.4., el lema A.5.I. es muy fácil de demostrar: la única forma en cómo una valoración v podría no satisfacer $\Lambda x\xi(x) \rightarrow \xi(t)$ (estando t libre para x) es que satisfaciese $\Lambda x\xi(x)$ pero no satisfaciese $\xi(t)$. Ahora bien, si satisface $\Lambda x\xi(x)$ ello significa que toda valoración x-equivalente a v, y en particular aquella v' tal que $v'(x) = v(t)$ satisface $\xi(x)$; pero entonces en virtud de A.5.I.4. v debe satisfacer $\xi(t)$ contrariamente a lo dicho antes. Así pues, A.5.I. es logicamente auténtica.

El siguiente lema es el temible:

A.5.II Lema

Todas las instancias del esquema axiomático A.5.II son logicamente verdaderas; es más, si $\alpha$ no es crítica en $\xi(\alpha)$ o $\tau$ es una expresión $\eta$, entonces la instancia es logicamente auténtica.

En primer lugar se necesita disponer de varios sublemas sencillos cuya demostración omitimos, pues se basa en simples procesos inductivos.

A.5.II.1 Sublema

Sea $v$ una valoración cualquiera y sea $v'$ la valoración $\alpha$-equivalente a $v$ tal que $v'(\alpha) = v(\tau)$. Entonces para todo término gramatical $\mu$ se verifica que:

$$v'(\mu) = v(\mu_{\alpha/\tau})$$

Siendo $\mu_{\alpha/\tau}$ el término que resulta de sustituir las apariciones directas de $\alpha$ en $\mu$ por $\tau$.

A.5.II.2 Sublema

Sean $v$ y $w$ dos valoraciones cualesquiera $\alpha$-equivalentes y $\tau$ un término gramatical que no contiene a $\alpha$ directamente; entonces:

$$v(\tau) = w(\tau)$$

A.5.II.3 Sublema

Sean $v$ y $w$ dos valoraciones $\alpha$-equivalentes entonces para todo término individual se tiene:

$$v(t) = w(t)$$

Estos lemas son análogos a los anteriores para A.5.I. además nos serán de utilidad los siguientes sublemas:

A.5.II.4 Sublema

Si $\alpha$ no es crítica en $\xi(\alpha)$ y $\xi(\alpha)\varepsilon E_n$, entonces $\xi(\tau)\varepsilon E_n$, cualquiera que sea $\tau$.

A.5.II.5 Sublema

Sea $\mu\varepsilon\Omega_n$ y sea $\tau\varepsilon\Omega_n$ también, entonces $\mu_{\alpha/\tau}\ \varepsilon\ \Omega_n$.

A.5.II.6 Sublema

Si $\xi(\alpha)\varepsilon E_{n+1}$ y $\tau\varepsilon\Omega_n$ ($n\geq 1$) entonces $\xi(\tau)\varepsilon E_{n+1}$.

Asimismo se demuestran facilmente por inducción.

Vamos a dividir la demostración del sublema A.5.II en tres casos:

a) $\alpha$ no es crítica en $\xi(\alpha)$

b) Si bien $\alpha$ es crítica en $\xi(\alpha)$, $\tau$ es una expresión $\eta$.

c) $\alpha$ es crítica en $\xi(\alpha)$ y $\tau$ no es una expresión.

En los dos primeros casos hay que demostrar que $\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$ es satisfecha por todas las valoraciones, mientras que el tercer caso sólo hemos de demostrar que es logicamente verdadera. Para ello hemos de demostrar en primer lugar el siguiente sublema:

A.5.II.7.a: Sublema

Sea $\xi(\alpha)$ una expresión en la cual $\alpha$ no es crítica; entonces, una valoración v satisface $\xi(\tau)$ ssi la valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v'(\alpha) = v(\tau)$ satisface $\xi(\alpha)$.

La demostración se realiza por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de la expresión.

Paso base: expresiones atòmicas

Hay dos casos:

1) La expresión $\xi(\alpha)$ es de la forma:

$F_r^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\ \mu_1,\ldots,\mu_q)$ con $F_r^{p,q} \neq V$.

Naturalmente la valoración v' satisfará esta expresión ssi se verifica:

$\bar{F}_r^{p,q}(v'(t_1),\ldots,v'(t_p);\ v'(\mu_1),\ldots,v'(\mu_q))$

Pero por una parte:

$v'(t_i) = v(t_i)$; sublema A.5.II.3.

y por otra:

$v'(\mu_i) = v(\mu_i\ \alpha/\tau)$; sublema A.5.II.1. es decir v' satisface $\xi(\alpha)$ ssi se verifica:

$\bar{F}r^{p,q}\ [v(t_1),\ldots,v(t_p);\ v(\mu_1\ \alpha/\tau),\ldots v(\mu_q\ \alpha/\tau)]$ es decir ssi v satisface $\xi(\tau)$.

2) La expresión $\xi(\alpha)$ es de la forma $V(\mu)$. Naturalmente que al no ser crítica $\alpha$ en esta expresión $\mu$ no puede contener directamente a $\alpha$; por lo tanto, según el sublema A.5.II.2 dado que v y v' son $\alpha$-equivalentes, se tendrá:

$v(\mu) = v'(\mu)$

Por otra parte, dado que las apariciones libres de $\alpha$ en $V(\mu)$ serían las directas en $\mu$ y ya hemos visto que de estas no puede haber, $\xi(\tau)$ es tambien $V(\mu)$. En resumen; v satisfará $\xi(\tau)$ ssi se verifica (lema 1.3.8)

$\bar{V}(v(\mu))$

y v' satisfará $\xi(\alpha)$ ssi se verifica:

$\bar{V}(v'(\mu))$

como $v(\mu) = v'(\mu)$ v satisfará $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

Paso de inducción: Supongamos el lema válido para expresiones que tengan m conectivas y/o cuantificadores y demostrémoslo para m+1. Hay varios casos:

1) $\xi(\alpha)$ es de la forma $\neg\xi_1(\alpha)$; satisfaciendo v' $\xi_1(\alpha)$ ssi v satisface $\xi_1(\tau)$. Entonces es evidente que v' satisfará $\neg\xi_1(\alpha)$ ssi v satisface $\neg\xi_1(\tau)$.

2) $\xi(\alpha)$ de la forma $\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)$. Ademas v' ha de satisfacer $\xi_1(\alpha)$ ssi v satisface $\xi_1(\tau)$ y ha de satisfacer v' $\xi_2(\alpha)$ ssi v satisface $\xi_2(\tau)$, por tener $\xi_1$ y $\xi_2$ menos conectivas y/o cuantificadores. Asimismo es evidente que v' satisfará $\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)$ ssi v satisface $\xi_1(\tau)\rightarrow\xi_2(\tau)$.

3) $\xi(\alpha)$ es de la forma $\Lambda x\xi_1(\alpha)$.

Naturalmente $\xi(\tau)$ es de la forma $\Lambda x\xi_1(\tau)$. Unicamente no se verifica el lema si se pudiese dar alguno de los dos casos siguientes:

I) Que v' satisfaciese $\xi(\alpha)$ pero que v no satisfaciese $\xi(\tau)$.

II) Que v' no satisfaciese $\xi(\alpha)$ pero que v satisfaciese $\xi(\tau)$.

Supongamos que se diese el primero; entonces existiría una valoración w x-equivalente a v que no satisfaría $\xi_1(\tau)$. Consideremos la valoración w' x-equivalente a v' y tal que $w'(x)=w(x)$ por ser x-equivalente a v' debe satisfacer $\xi_1(\alpha)$. Ahora bien w y w' son dos valoraciones $\alpha$-equivalentes que satisfacen los requisitos del lema, ya que:

$$w(\tau) = v(\tau) \quad w'(\alpha) = v'(\alpha)$$

(por ser x-equivalentes; sublema A.5.I.3.). Siendo por hipótesis:

$v(\tau) = v'(\alpha)$

Significa que:

$w(\tau) = w'(\alpha)$

(Para la única otra variable para la que pueden diferir hemos impuesto $w'(x) = w(x)$). Así pues, por hipótesis de inducción $w'$ debe satisfacer $\xi_1(\alpha)$ ssi $w$ satisface $\xi(\tau)$.

Contrariamente a lo visto antes ($w$ no satisfacía $\xi_1(\tau)$ y $w$ satisfacía $\xi_1(\alpha)$). Así pues, el primer caso no se puede dar y se demuestra de forma completamente análoga que el segundo tampoco.

4) $\xi(\alpha)$ es de la forma $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

Hay naturalmente que distinguir dos casos: si $\beta$ es igual a $\alpha$ o si no lo es:

- $\beta \equiv \alpha$; es decir $\xi(\alpha)$ es $\Lambda\alpha\xi_1(\alpha)$.

Por no estar libre $\alpha$ en esta expresión $\xi(\tau)$ será también $\Lambda\alpha\xi_1(\alpha)$. Ahora bien $v$ y $v'$ son $\alpha$-equivalentes; no estando libre $\alpha$ en $\Lambda\alpha\xi_1(\alpha)$ asignaran a todas las demas variables libres las mismas variables libres, los mismos valores y por tanto (lema 1.3.16) una la satisfará ssi la otra también la satisface; es decir, $v$ satisface $\xi(\tau)$ ssi $v'$ satisface $\xi(\alpha)$.

- $\beta \not\equiv \alpha$; recordemos entonces que $\xi(\alpha) = \Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y $\xi(\tau)=\Lambda\beta\xi_1(\tau)$.

Naturalmente si $\alpha$ no es crítica en $\xi(\alpha)$ tampoco lo es en $\xi_1(\alpha)$. Por lo que a $\xi_1(\alpha)$ y $\xi_1(\tau)$ les es aplicable el lema por hipótesis de inducción. Por otra parte es evidente que el conjunto de variables críticas en $\xi_1(\alpha)$ es el mismo que en $\xi_1(\tau)$ ya que al no ser crítica en $\xi_1(\alpha)$ ninguna de las variables que se presenten directamente en $\tau$ puede pasar a ser crítica en $\xi_1(\tau)$.

Dentro de este caso ($\beta \not\equiv \alpha$) se plantean a su vez varios subcasos:

- $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ $\varepsilon E_1$; en este caso v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v satisface $\xi_1(\alpha)$. Otro tanto se puede decir respecto a v' y $\xi_1(\tau)$.

Pudiendo asi plantear ya los dos conocidos casos en los cuales el lema no se cumplirá:

I) Que v satisfaga $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ pero que v' no satisfaga $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$.

II) Que v no satisfaga $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ pero que v' satisfaga $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$.

En el primer caso basta con considerar la valoración w $\beta$-equivalente a v y que no satisface $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y la valoración w' $\beta$-equivalente a v' y tal que $w'(\beta) = w(\beta)$ junto con:

- El hecho de que

$$w(\tau) = v(\tau)$$

ya que $\tau$ no contiene directamente a $\beta$ (sublema A.5.II.2) pues, de lo contrario, no estaría libre para sustituir a $\alpha$ en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$. Y como $v(\tau) = v'(\alpha)$ (por hipótesis) y $v'(\alpha) = w'(\alpha)$ (por ser $\beta$-equivalentes), ello significa que $w(\tau) = w'(\alpha)$.

- La hipótesis de inducción.

LLegándose inmediatamente a demostrar que el caso I no se puede dar; y analogamente se hace con II.

- $\Lambda\beta\xi_1(\alpha) \varepsilon (E_{m+1} - E_m)$; siendo además v $\varepsilon$ $G_m$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$ $(m\geq 1)$. En tal caso v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_m$ $[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$.

Pero otro tanto se puede decir respecto a v' y $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$, ya que por el sublema A.5.II.4. $\Lambda\beta\xi_1(\tau) \varepsilon (E_{m+1} - E_m)$ y por otra parte $K[\Lambda\beta\xi_1(\alpha)] = K[\Lambda\beta\xi_1(\tau)]$ siendo v y v' $\alpha$-equivalentes y no siendo $\alpha$ crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$, ello significa que v $\varepsilon G_m$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$.

La demostración es entonces como en el caso anterior con la única diferencia de que hay que comprobar que si una de las valoraciones (digamos w) pertenece a $G_m$ $[K\{\xi_1(\alpha)\}]$, entonces la otra (w') también cumple el requisito de pertenecer a $G_m[K\{\xi_1(\tau)\}]$. Ello es inmediato ya que son $\alpha$-equivalentes; $K\{\xi_1(\alpha)\} = K\{\xi_1(\tau)$ y $\alpha$ no es crítica en estas expresiones.

- $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ $\varepsilon$ $(E_{m+1} - E_m)$; pero no se da el caso de que v $\varepsilon$ $G_m[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$. Sin embargo, existirá un s>m tal que v$\varepsilon G_s[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$ y entonces v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_s[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$.

La demostración sigue entonces por los mismos derroteros que en el apartado anterior con la diferencia adicional de cambiar m por s.

Ello finaliza los casos posibles dentro de este sublema quedando así demostrado A.5.II.7.a.

Obsérvese que este sublema implica inmediatamente que todas las instancias de A.5.II. en las que $\alpha$ no es crítica son logicamente auténticas, pues si hubiese una valoración v que satisfaciese $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ y no satisfaciese $\xi(\tau)$, al considerar la valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v'(\alpha) = v(\tau)$, entraríamos en contradicción con el sublema.

A.5.II.7.b: Sublema

Sean $\xi(\alpha)$ $\varepsilon$ $E_{n+1}$ y $\eta$ $\varepsilon$ $E_n$ expresiones y sea v una valoración cualquiera; si v' es la valoración $\alpha$-equivalente a v y tal que $v'(\alpha) = \eta$ entonces v satisfacerá $\xi(\eta)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

La demostración se realiza por inducción sobre el grado de la expresión (sobre n).

Paso base:

Expresiones de $E_1$; en tal caso $\alpha$ no es crítica y estamos en un caso particular de A.5.II.7.a.; asi pues, no hay nada que demostrar.

Paso de inducción:

La demostración de este paso se realiza a su vez por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de la expresión.

Subpaso base:

Expresiones atómicas; hay de dos tipos: bien $\xi(\alpha)$ es de la forma $F_r^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\ \tau_1,\ldots,\tau_q)$ con $F_r^{p,q} \neq V$, en cuyo caso estamos en $E_1$ y nada hay que demostrar; o de la forma $V(\mu)$ con $\mu \varepsilon \Omega_n$. En dicho caso v satisfará $\xi(\eta)$ ssi se verifica:

$$\bar{V}(v(\mu_{\alpha/\eta}))$$

mientras que v' satisfará $\xi(\alpha)$ ssi se verifica:

$\bar{V}(v'(\mu))$

Pero $v'(\mu) = v(\mu_{\alpha/\eta})$ (sublema A.5.II.1.) con lo cual una satisface $\xi(\eta)$ ssi otra satisface $\xi(\alpha)$. Ello finaliza el subpaso base.

Subpaso de inducción:

Supuesto demostrado el lema hasta $\delta$ conectivas y/o cuantificadores demostrémoslo para $\delta+1$.

Si la expresión es de una de las formas:

a) $\neg\xi_1(\alpha)$

b) $\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)$

c) $\Lambda x\ \xi_1(\alpha)$

La demostración es inmediata y se realiza sin ningún problema como ya se ha hecho otras veces (por ejemplo ver el sublema A.5.II.7.a.). Si la expresión es de la forma:

d) $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$

Entonces en primer lugar hay dos casos:

- Si $\beta \equiv \alpha$ nada hay que demostrar pues $\alpha$ no puede ser crítica en $\xi(\alpha)$ y por tanto estamos en A.5.II.7.a.

- Si $\beta \not\equiv \alpha$ y $\alpha$ no es crítica en $\xi_1(\alpha)$ de nuevo estaríamos en el sublema anterior. Así pues, el único caso interesante es que $\xi(\alpha)$ sea de la forma $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ con $\beta \not\equiv \alpha$ y $\alpha$ crítica en $\xi_1(\alpha)$. A su vez dentro de este caso se pueden distinguir varios apartados:

1) $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\ \varepsilon\ (E_{n+1} - E_n)$

2) $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ε $E_n$ y $\eta \notin (E_n - E_{n-1})$ (n>1 ya que α es crítica).

3) $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ε $E_n$ y $\eta \in (E_n - E_{n-1})$ (n>1 ya que α es crítica).

Empecemos por el primer caso:

1) Obsérvese en primer lugar que en virtud del sublema A.5.II.6. $\xi(\eta) \in (E_{n+1} - E_n)$; además tengase en cuenta que si llamamos $A=K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}$ y $B=K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}$ entonces $B=A\cup\{\alpha\}$, ya que η no puede contener variables presentes directamente y por lo tanto perdemos la variable crítica α sin ganar otra a cambio.

Hay entonces dos casos:

- $v \in G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}]$; pero en tal caso $v' \in G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$ ya que para la única otra variable en discordia α, se verifica que $v'(\alpha)=\eta \in E_n$.

Asi pues estamos en el caso a de la definición inductiva de satisfacción y tendremos: v satisfará $\xi(\eta)$ ssi toda valoración β-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\eta)\}]$ satisface $\xi_1(\eta)$.

v' satisfará $\xi(\alpha)$ ssi toda valoración β-equivalente a v' y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$.

La demostración continua entonces por los mismos derroteros que siempre sin más que considerar valoraciones w y w' tales que $w(\beta) = w'(\beta)$ siendo la primera β-equivalente a v y la segunda a v'. Naturalmente que si una pertenece a $G_n[K\{\xi_1(\eta)\}]$ es evidente que la otra pertenece a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$; como además $w'(\alpha)=v'(\alpha)=\eta$, les es aplicable la hipótesis de inducción a w y w' etc.

- $v \notin G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}]$; pero en tal caso también se tendrá que $v' \notin G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$. Naturalmente existirá un s>n tal que

$v\varepsilon(G_s-G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}]$. Pero en tal caso además $v'\varepsilon(G_s-G_{s-1})[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$, ya que $A=B\cup\{\alpha\}$, asignándose a $\alpha$ una expresión de $E_n\subset E_s$. Por lo tanto, las condiciones en las que v y v' satisfacen $\Lambda\beta\xi_1(\eta)$ y $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ son las mismas que en el caso anterior cambiando n por s (apartado b.2.2. de la definición inductiva) y la demostración sigue el mismo camino.

El segundo apartado era:

$\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ $\varepsilon E_n$ y $\eta \notin(E_n - E_{n-1})$ (n>1 ya que $\alpha$ es crítica).

Pero este caso ya habrá sido demostrado para un paso anterior en la inducción sobre n, ya que se trata de $\xi(\alpha)\varepsilon E_{m+1}$ y $\eta\varepsilon E_m$ con m<n. En consecuencia, nada hay que demostrar.

Por último el tercer apartado es:

$\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\varepsilon E_n$ y $\eta\varepsilon(E_n - E_{n-1})$ (n>1). Observemos en primer lugar que dado que $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\varepsilon E_{n+1}$ el sublema A.5.II.6. nos garantiza $\Lambda\beta\xi_1(\eta)\varepsilon E_{n+1}$. Naturalmente $\Lambda\beta\xi_1(\eta)\notin$ $E_n$ ya que $\eta\varepsilon(E_n - E_{n-1})$ y $\alpha$ (la variable sustituida) es crítica. Asi pues, $\Lambda\beta\xi_1(\eta)\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$. Asimismo como en el apartado anterior hay dos casos:

- $v\varepsilon G_n[K\{\beta\xi_1(\eta)\}]$; en cuyo caso v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\eta)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\eta)\}]$ satisface $\xi_1(\eta)$.

Pero por otra parte $v'(\alpha) = \eta$ que pertenece a $E_n - E_{n-1}$ luego $v'\varepsilon(G_n - G_{n-1})[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$. Asi pues, v' satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$. La demostración sigue entonces los mismos pasos, ya que el que una de las valoraciones (w) pertenezca a $G_n[K\{\xi_1(\eta)\}]$ garantiza el que la otra (w') pertenezca a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ y viceversa.

- v $\notin G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}]$; en cuyo caso habrá sin embargo un s tal que v $\varepsilon(G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\eta)\}]$ con s>n. Naturalmente entonces tambien v' $\varepsilon(G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$ y las condiciones en las que v y v' satisfacen respectivamente $\Lambda\beta\xi_1(\eta)$ y $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ son las mismas que en el caso anterior, pero con s en lugar de n. Asimismo la demostración sigue idéntico camino.

Ello finaliza el tercer apartado y por lo tanto queda demostrado el sublema A.5.II.7.b. Este sublema garantiza que aquellas instancias de A.5.II. en las cuales $\alpha$ es crítica pero $\tau$ es una expresión (perteneciente a $E_n$) son logicamente auténticas. La única forma en como una valoración v podría no satisfacer

$$\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\eta)$$

sería que satisfaciese $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ y no satisfaciese $\xi(\eta)$. Hay entonces dos casos:

- v$\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha)\}]$; en cuyo caso toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi(\alpha)\}]$ satisfará $\xi(\alpha)$; considerando la valoración v' $\alpha$-equivalente a v tal que v'$(\alpha)=\eta$ se tiene que v' $\varepsilon G_n[K\{\xi(\alpha)\}]$ dado que $\eta\varepsilon E_n$ y por lo tanto v' debe satisfacer $\xi(\alpha)$, con lo que el lema nos fuerza a que v satisfaga $\xi(\eta)$ contrariamente a lo dicho antes.

- v $\notin G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha)\}]$, pero en tal caso existirá un s>n tal que v$\varepsilon(G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha)\}]$ y naturalmente v' $\varepsilon G_s[K\{\xi(\alpha)\}]$ dado que v'$(\alpha)=\eta\varepsilon E_n$, estamos en el mismo caso de antes pero cambiando n por s.

Nos queda obviamente por demostrar un tercer sublema para cubrir aquellos casos en los que $\alpha$ es crítica y $\tau$ no es una expresión.

A.5.II.7.c: Sublema

Sea $\xi(\alpha)\varepsilon E_{n+1}$; sea $\tau$ un término libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ (y perteneciente a $\Omega_n$ si n>0 y además se da el caso de que $\alpha$ es crítica en $\xi(\alpha)$). Sea v una valoración cualquiera (pero perteneciente a $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)\}]$ si n>0) y sea v' la valoración $\alpha$-equivalente a v tal que $v'(\alpha)=v(\tau)$. Entonces v satisface $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

La demostración de este lema es por inducción sobre n; para n=0 no necesitamos demostrar nada, pues el lema A.5.II.7.a. ya demostrado, afirma lo mismo que A.5.II.7.c. para el caso n=0. Así pues, el paso base ya esta dado.

Paso de inducción:

Supuesto demostrado el lema hasta n=m, demostrarlo para n=m+1.

La demostración se hará por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de $\xi(\alpha)$.

Téngase en cuenta que dado que n>0 lo que debemos demostrar es lo siguiente: (lema A.5.II.7.c, bis):

Sea $\xi(\alpha)\varepsilon E_{n+1}$; sea $\tau$ un término libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ y perteneciente a $\Omega_n$ en caso de que $\alpha$ sea crítica en $\xi(\alpha)$; sea v una valoración cualquiera perteneciente a $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)\}]$ y sea v' la valoración $\alpha$-equivalente a v tal que $v'(\alpha)=v(\tau)$. Entonces v satisface $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

Subpaso base:

a) $\xi(\alpha)$ es de la forma $F_r^{p,q}(t_1, t_2,\ldots t_p; \tau_1, \tau_2\ldots\tau_q)$. En este caso estamos de nuevo en $E_1$ y el lema A.5.II.7.a. nos asegura que para cualquier $\tau$ y cualquier valoración v se verifica que v satisface $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

b) $\xi(\alpha)$ es de la forma $V(\mu)$; pero entonces $\xi(\tau)$ será de la forma $V(\mu_{\alpha/\tau})$ y se da:

- v satisface $\xi(\tau)$ ssi se verifica $\bar{V}(v(\mu_{\alpha/\tau}))$.

- v' satisface $\xi(\alpha)$ ssi se verifica $\bar{V}(v'(\mu))$.

Ahora bien $v(\mu_{\alpha/\tau}) = v'(\mu)$ (lema A.5.II.1). Por lo tanto, una satisface $\xi(\alpha)$ ssi la otra satisface $\xi(\alpha)$.

Subpaso de inducción:

Supuesto el lema válido para expresiones de $E_{n+1}$ con hasta $\delta$ conectivas demostremos que es válida para $\delta$+1.

a) $\xi(\alpha)$ es de la forma $\neg\xi_1(\alpha)$. Naturalmente si $\alpha$ es crítica en $\xi_1(\alpha)$, con lo que el rango de términos $\tau$ para los cuales sería válido el lema en $\xi_1(\alpha)$ queda limitado, también es crítica en $\xi(\alpha)$ y queda limitado de la misma forma el rango de términos para los cuales es preciso demostrar el lema. Así pues, podemos considerar que éste es válido para $\xi_1(\alpha)$. Por otra parte también el conjunto de valoraciones para las cuales es preciso demostrar el lema coincide con el conjunto de valoraciones para las cuales es válido el lema para $\xi_1(\alpha)$, puesto que:

$$G_n[K\{\Lambda\alpha(\neg\xi_1(\alpha)) \rightarrow \neg\xi_1(\tau)] = G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}].$$

Por tanto, aplicando el lema: si v satisface $\xi_1(\tau)$ ssi v' satisface $\xi_1(\alpha)$, es evidente que v satisfará $\neg\xi_1(\tau)$ ssi v' satisface $\neg\xi_1(\alpha)$.

b) $\xi(\alpha)$ es de la forma $\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)$. Naturalmente, si bien $\xi_1(\alpha)$ o bien $\xi_2(\alpha)$ limitan el rango de términos para los cuales es válido el lema porque en una de ellas sea $\alpha$ crítica, también $\alpha$ es crítica en $\xi(\alpha)$ y queda de igual forma limitado el rango de términos $\tau$ para los cuales hemos de demostrar el lema. Por otra parte $G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)) \rightarrow (\xi_1(\tau) \rightarrow \xi_2(\tau)\}]$ es un subconjutno de la intersección entre $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$ y $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_2(\alpha) \rightarrow \xi_2(\tau)\}]$ (ya que el conjunto de variables críticas en $\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$ contiene a los conjuntos de variables críticas en $\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)$ y en $\Lambda\alpha\xi_2(\alpha) \rightarrow \xi_2(\tau)$.

Es decir, el conjunto de valoraciones para las que hemos de demostrar que el lema es válido para $\xi(\alpha)$ es subconjunto del conjunto de valoraciones para las cuales el lema es aplicable a $\xi_1(\alpha)$ y $\xi_2(\alpha)$. Así pues aplicandólo: si v satisface $\xi_1(\tau)$ ssi v' satisface $\xi_1(\alpha)$ y v satisface $\xi_2(\tau)$ ssi v' satisface $\xi_1(\alpha)$, entonces es evidente que v satisface $\xi_1(\tau) \rightarrow \xi_2(\tau)$ ssi v' satisface $\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_2(\alpha)$.

c) Supongamos que $\xi(\alpha)$ sea de la forma $\Lambda x\xi_1(\alpha)$. De la misma manera se demuestra que el conjunto de términos $\tau$ para los cuales hay que demostrar el lema es el mismo que aquellos para los que es válido en $\xi_1(\alpha)$ y que el conjunto de valoraciones para los cuales hay que demostrarlo es el mismo que para aquellas para las que es válido en $\xi_1(\alpha)$: si $\alpha$ es crítica en $\xi_1(\alpha)$ (y limita el rango de posibles $\tau$), también es crítica en $\Lambda x\ \xi_1(\alpha)$ (y queda igualmente limitado el rango de $\tau$ para los que hay que demostrarlo). Asimismo $G_n[K\{\Lambda\alpha\Lambda x\ \xi_1(\alpha) \rightarrow \Lambda x\xi_1(\tau)\}] = G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$.

Por lo tanto podemos aplicar confiadamente el lema en $\xi_1(\alpha)$.

La demostración es la clásica: hay dos casos en los cuales el lema no sería válido.

I) Que v satisfaciese $\Lambda x\xi_1(\tau)$ pero que v' no satisfaciese $\Lambda x\xi_1(\alpha)$.

II) Que v no satisfaciese $\Lambda x\xi_1(\alpha)$ pero v' satisfaciese

$\Lambda x\xi_1(\alpha)$.

Si por ejemplo se diese I significaría que existiría una w' x-equivalente a v' que no satisfaría $\xi_1(\alpha)$. Considerando la valoración w x-equivalente a v tal que $w(x) = w'(x)$, w habría de satisfacer $\xi_1(\tau)$. Pero ahora $w(\tau) = v(\tau) = v'(\alpha) = w'(\alpha)$ y w satisfaría $\xi_1(\tau)$ ssi w' satisface $\xi_1(\alpha)$, lo cual contradice lo anteriormente dicho.

Analogamente se ve que II no puede darse.

d) Supongamos que $\xi(\alpha)$ sea de la forma $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$. Hay dos alternativas:

- Si $\beta\equiv\alpha$, $\alpha$ no es crítica en $\xi(\alpha)$ y el lema A.5.II.7.a. nos asegura que para cualquier valoración v y para cualquier término $\tau$, v satisface $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$ luego, nada hay que demostrar.

- Si $\beta\not\equiv\alpha$ y $\alpha$ no es crítica, de la misma forma, no habría nada que demostrar. Así pues, sólo es interesante el caso en el que $\beta\not\equiv\alpha$ y $\alpha$ es crítica en $\xi_1(\alpha)$.

En primer lugar el rango de posibles $\tau$ para los que hay que demostrar el lema queda limitado a los de $\Omega_n$, pues $\alpha$ es crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$; rango para los cuales el lema es válido en $\xi_1(\alpha)$. Sin embargo hay que tener cuidado, pues en principio no tiene porque ser cierto que toda $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\Lambda\beta\xi_1(\alpha) \rightarrow \Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ verifique que $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$. Es decir no toda v para la cual queremos demostrar el lema tiene porque verificarlo para $\xi_1(\alpha)$. Ello, sin embargo, no va a importar, puesto que en la demostración subsiguiente de que v satisface $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi v' satisface $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$, no son v y v' las que han de cumplir los lemas sino las valoraciones $\beta$-equivalentes w y w'.

Así pues, nuestro propósito es demostrar que toda

$v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\Lambda\beta\xi_1(\alpha) \rightarrow \Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ satisface $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi la valoración v' $\alpha$-equivalente a ella y tal que $v'(\alpha) = v(\tau)$ satisface $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

Podemos además contar con que $\alpha$ es crítica en $\xi_1(\alpha)$ y $\tau \varepsilon \Omega_n$.

Hagamos en primer lugar algunas observaciones:

- $\tau$ no puede contener a $\beta$ directamente dado que de lo contrario no estaría libre para sustituir a $\alpha$ en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

- Toda variable presente directamente en $\tau$ será crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$; la razón de ello es que $\alpha$ era crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y ninguna de las variables $\varphi$ presentes directamente en $\tau$ puede estar bajo un $\Lambda\varphi$ en $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ (de lo contrario $\tau$ no estaría libre para $\alpha$ en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

- Dado que $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$, por el comentario anterior v asignará a las variables presentes directamente en $\tau$ expresiones de $E_n$, y como $\tau \varepsilon \Omega_n$, por el lema 1.3.3. $v(\tau) \varepsilon E_n$. Así pues, $v'(\alpha) \varepsilon E_n$.

- Además, dado que $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ v' asignará a todas las variables críticas en $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ expresiones de $E_n$, ya que v' es $\alpha$-equivalente a v y además esta expresión no contiene a $\alpha$ ni siquiera libre (y mucho menos crítica).

- Por lo tanto es evidente, juntando los dos resultados anteriores que $v' \varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$.

Para demostrar el lema hay que considerar varios casos:

1) $\xi(\alpha) \varepsilon E_{n+1} - E_n$ (ello naturalmente conlleva que $\xi(\tau) \varepsilon E_{n+1} - E_n$, lema A.5.II.6.).

En este caso dado que $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ v satisfará

$\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi toda valoración $w\varepsilon G_n[K\xi_1(\tau)\}]$ y $\beta$-equivalente a v satisface $\xi_1(\tau)$.

Analogamente, dado que $v'\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$, v' satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $w'\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ y $\beta$-equivalente a v' satisface $\xi_1(\alpha)$.

*

Hay dos casos en los que el lema no se cumpliría.

I) Que v satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ para que v' no satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

II) Que v no satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ pero que v' satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

Supongamos que se diese I; en tal caso habría una valoración w' $\beta$-equivalente a v' y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ que no satisfaría $\xi_1(\alpha)$.

Consideremos la valoración w $\beta$-equivalente a v y tal que $w(\beta)=w'(\beta)$.

Puesto que $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$, lo único que tenemos que demostrar es que si $\beta$ es crítica en $\xi_1(\tau)$, w le asigna una expresión de $E_n$ (para que podamos deducir que $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$. Ahora bien, dado que $\tau$ no contiene a $\beta$, si $\beta$ es crítica en $\xi_1(\tau)$ lo es en $\xi_1(\alpha)$ y w' (y por lo tanto w) le asignará una expresión de $E_n$. Así pues, $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$, por lo tanto w debe satisfacer $\xi_1(\tau)$.

Por otra parte:

$w'(\alpha) = v'(\alpha)$ (son $\beta$-equivalentes).

$w(\tau) = v(\tau)$; ya que w y v son $\beta$-equivalentes y $\tau$ no contiene a $\beta$ (lema A.5.II.2.) y como $v'(\alpha) = v(\tau)$ se tiene entonces $w'(\alpha)=w(\tau)$.

Por lo cual, sólo nos queda por ver que $w\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$ para que el lema sea aplicable a w y w' con $\xi_1(\alpha)$ y $\tau$.

Ahora bien ello es evidente, dado que por una parte $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$ y por otra, dado que la única variable gramatical crítica que puede haber en $\xi_1(\alpha)$ que no esté en $\xi_1(\tau)$ es precisamente $\alpha$ y esta aparece ligada en $\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)$. Asi pues $w\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$ y por lo tanto w satisfará $\xi_1(\tau)$ ssi w' satisface $\xi_1(\alpha)$; cosa que contradice lo anteriormente dicho. Concluimos que I no se puede dar.

Viceversa, supongamos que se diese II. Entonces existiría una valoración w $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$ que no satisfaría $\xi_1(\tau)$.

Consideremos la valoración w' $\beta$-equivalente a v' y tal que $w'(\beta)=w(\beta)$. Veamos que $w'\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$.

Por una parte, puesto que v' y w' son $\beta$-equivalentes y $\beta$ no aparece libre en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y al ser $v'\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$ se tendrá $w'\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$; por otra parte, si $\beta$ es crítica en $\xi_1(\alpha)$ lo es tambien en $\xi_1(\tau)$ y entonces al ser $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$ se tendrá que $w(\beta)=w'(\beta)\ \varepsilon E_n$. Por lo tanto $w'\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$. Así pues, w' debe satisfacer $\xi_1(\alpha)$.

Entonces, al igual que antes:

$w'(\alpha) = v'(\alpha)$ por ser $\beta$-equivalentes. $w(\tau) = v(\tau)$ ya que w y v son $\beta$-equivalentes y $\tau$ no contiene a $\beta$ directamente. Y como $v'(\alpha) = v(\tau)$ se tendrá que $w'(\alpha) = w(\tau)$.

Luego sólo queda por ver que se verifica que:

$w \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1(\alpha) \rightarrow \xi_1(\tau)\}]$ para que el lema sea aplicable a w y w' con $\xi_1(\alpha)$ y $\tau$.

Pero dado que $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$ esto es evidente y por tanto w satisfará $\xi_1(\tau)$ ssi w' satisface $\xi_1(\alpha)$. Lo cual contradice lo dicho anteriormente y por lo tanto II no se puede dar.

**

2) $\xi(\alpha)\not\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$. Dentro de este apartado hay varios subcasos:

2.1) $\xi(\alpha)\varepsilon E_1$. Obsérvese que también se tendra $\xi(\tau)\varepsilon E_1$; ahora bien, disponemos del lema A.5.II.7.a. que nos asegura que cualquiera que sea $\tau$ v satisfará $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$. Por tanto, nada más hay que demostrar aquí.

2.2) $\xi(\alpha)\not\varepsilon E_1$ (aunque $\xi(\alpha)\varepsilon E_n$, por lo que estamos con $n>1$). En primer lugar, es claro que $\xi(\tau)\not\varepsilon E_1$. Aun asi hay dos casos que tratar:

2.2.1) $\xi(\tau)\varepsilon E_{n+1} - E_n$

2.2.2) $\xi(\tau)\not\varepsilon E_{n+1} - E_n$.

Estudiaremos 2.2.1 primero: si $\xi(\alpha)\varepsilon E_n$ y $\xi(\tau)\not\varepsilon E_n$ es porque $\tau\not\varepsilon\Omega_{n-1}$, ya que en caso contrario: $\xi(\alpha)\varepsilon E_n$, $\tau\varepsilon\Omega_{n-1}$ implicarían $\xi(\tau)\varepsilon E_n$ según el sublema A.5.II.6.

Ahora bien $\tau\not\varepsilon\Omega_{n-1}$ implica que $v(\tau)\not\varepsilon E_{n-1}$ (pues $\tau$ estará formado a partir de expresiones, alguna de las cuales no pertenecerán a $E_{n-1}$, y de variables gramaticales; pero una valoración deja inalteradas las expresiones y por lo tanto se tiene que $v(\tau)\not\varepsilon E_{n-1}$). Asi pues, dado que $v(\tau) = v'(\alpha)$ y pertenece a $E_n$, se tiene $v'(\alpha) = v(\tau)\varepsilon E_n - E_{n-1}$.

Por otra parte, $\alpha$ debe ser crítica en $\xi(\alpha)$, pues de lo contrario si $\xi(\alpha)\varepsilon E_n$ y $\alpha$ no es crítica el lema A.5.II.4. aseguraría que $\xi(\tau)\varepsilon E_n$.

Como por otra parte $v'\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$, el hecho de que $\alpha$ sea crítica en $\xi(\alpha)$ (que es $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$) y $v'(\alpha)\not\varepsilon E_{n-1}$ significa que $v'\not\varepsilon G_{n-1}[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$. Es decir:

$v'\varepsilon(G_n - G_{n-1})\ [K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$.

En estas condiciones:

- v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\tau)\}]$ satisface $\xi_1(\tau)$ (ya que $\xi_1(\tau)\varepsilon(E_{n+1}-E_n)$ y $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ apartado <u>a</u> de la definición inductiva).

- v' satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v' y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$ (ya que $\xi_1(\alpha)\varepsilon E_n \neq E_1$ y $v'\varepsilon(G_n - G_{n-1})\ [K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$; apartado b.2.2 de la definición inductiva).

A partir de este momento, el resto de la demostración del punto 2.2.1 es como en el punto 1. anterior, desde el lugar marcado con el asterisco * hasta el marcado con **. Ya que las condiciones en las que v y v' satisfacen $\xi(\tau)$ y $\xi(\alpha)$ son las mismas que en dichos párrafos. Por lo tanto la omitimos. Vayamos al caso siguiente:

2.2.2. $\xi(\tau)\not\varepsilon(E_{n+1} - E_n)$.

Se plantean tambien aquí dos casos según que $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})\ [K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ o no. Veamoslos:

2.2.2.1: Supongamos en primer lugar que $v\varepsilon(G_n-G_{n-1})\ [K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$; esto será asi porque al menos a una variable crítica de $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ v le asigna una expresión de $E_n - E_{n-1}$. Esa variable bien puede presentarse directamente en $\tau$, o ser otra variable crítica de $\xi(\tau)$. En el segundo caso, como dicha otra variable no será $\alpha$ (ya que todas sus apariciones libres han sido sustituidas por $\tau$) v' que es $\alpha$-equivalente también le asignará una expresión de $E_n - E_{n-1}$. Y además dicha variable tambien se presentará crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ es decir se dará que $v'\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$.

Por otra parte si se da el caso de que $v\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ porque v asigna a una variable que se presenta directamente en $\tau$ una expresión de $E_n - E_{n-1}$, entonces en primer lugar dicha variable debe ser crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ y por lo tanto $\alpha$ debe ser asimismo crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$.

Además se tendrá que $v'(\alpha) = v(\tau)$ y dado que v asigna a una variable presente directamente en $\tau$ una expresión de $E_n$ - $E_{n-1}$ $v'(\alpha) = v(\tau)\varepsilon E_n - E_{n-1}$, por lo que en resumen también tendremos $v'\varepsilon(G_n - G_{n-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\alpha)\}]$.

Siendo ésta la situación tendremos:

- v satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\tau)$ (estamos en b.2.2 de la definición inductiva).

- v' satisfará $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ ssi toda valoración $\beta$-equivalente a v' y perteneciente a $G_n[K\{\xi(\alpha)\}]$ satisface $\xi_1(\alpha)$ (también estamos en el caso b.2.2 de la definición inductiva).

Pero entonces el demostrar que v satisface $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ ssi v' satisface $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ se limita a repetir lo dicho entre los asteriscos * y ** del caso 1. anterior, pues las condiciones en las que v y v' satisfacen $\xi(\tau)$ y $\xi(\alpha)$ son las mismas que en dicho caso.

2.2.2.2: Supongamos que $v\not\varepsilon(G_n-G_{n-1})$ $[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$; es decir, $v\varepsilon G_{n-1}[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$.

Recapitulando: estamos en la hipótesis de que $\xi(\alpha)$ y $\xi(\tau)\varepsilon E_n$ y que además podemos suponer $\alpha$ crítica en $\xi(\alpha)$ (ya que para $\alpha$ no crítica tenemos un lema que nos garantiza que cualquiera que sea $\tau$ v satisface $\xi(\tau)$ ssi v' satisface $\xi(\alpha)$.

Si $\tau\not\in\Omega_{n-1}$ entonces $\xi(\tau)$ no podría pertenecer a $E_n$; pues siendo $\alpha$ crítica en $\xi(\alpha)$; $\xi(\tau)$ contendría una subexpresión atómica $V(\mu_{\alpha/\tau})$ en la que $\mu_{\alpha/\tau}\not\in\Omega_{n-1}$ y por lo tanto $V(\mu_{\alpha/\tau})\not\in E_n$ con lo que $\xi(\tau)\not\in E_n$.

En resumen tenemos que $\tau\varepsilon\Omega_{n-1}$.

Por otra parte, el que $v\varepsilon G_{n-1}[K\{\Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ implica que $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\Lambda\beta\xi_1(\alpha)) \rightarrow \Lambda\beta\xi_1(\tau)\}]$ puesto que la única variable crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ que no es crítica en $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$ se halla ligada en $\Lambda\alpha(\Lambda\beta\xi_1(\alpha))$, pues se trata de $\alpha$.

Con ello llegamos a la conclusión de que estamos sencillamente en un paso anterior de la inducción para n, pues se tiene:

$\xi(\alpha)\varepsilon E_n$; $\tau\varepsilon\Omega_{n-1}$; $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)\}]$ (recuérdese $\xi(\alpha)=\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$) y por tanto, por hipótesis de inducción respecto a n, no hay nada más que demostrar; pues el que v satisface $\xi(\tau)$ ssi la valoración v', $\beta$-equivalente a ella y tal que $v'(\alpha)=v(\tau)$, satisface $\xi(\alpha)$, es algo que ha sido visto en un paso anterior.

Ello finaliza la prueba inductiva del lema A.5.II.7.c. al agotar los casos que nos quedaban por estudiar.

Veamos ahora cómo dicho lema nos permite concluir que el resto de las instancias de la segunda versión de A.5 son logicamente autenticas y por lo tanto logicamente verdaderas (no consideraremos n=0, pues ya se ha visto que esas son logicamente verdaderas, de la misma forma tampoco tenemos por qué considerar casos en los que $\alpha$ no es crítica).

Así pues, supongamos que $\xi(\alpha)\ \varepsilon E_{n+1} - E_n$ con $\alpha$ crítica y que $\tau\varepsilon\Omega_n$. Ya sabemos (lema A.5.II.6) que $\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$ pertenecerá a $E_{n+1} - E_n$.

Esta expresión ($\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)$) será verdadera ssi toda valoración $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\tau)\}]$ la satisface.

Ahora bien una tal valoración de la única forma en cómo podría no satisfacer dicha expresión es que satisfaciese $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ y no satisfaciese $\xi(\tau)$.

Ahora bien, si satisface $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ eso significa que toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi(\alpha)\}]$ satisface $\xi(\alpha)$.

Veamos que $v'\varepsilon G_n[K\{\xi(\alpha)\}]$:

En primer lugar $v\varepsilon G_n[K\xi(\tau)\}]$; pero por no ser crítica $\alpha$ en $\xi(\tau)$ (ni siquïera es libre) y ser $\alpha$-equivalente a v se tendrá $v'\varepsilon G_n[K\{\xi(\tau)\}]$; además $v'(\alpha) = v(\tau)$. Pero es fácil ver que $v(\tau)\varepsilon E_n$; en primer lugar $\tau\varepsilon\Omega_n$, y en segundo lugar cualquier variable $\delta$ presente directamente en $\tau$ será crítica en $\xi(\tau)$ (por serlo $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ y no poder estar bajo el radio de acción de ningún $\Lambda\delta$), con lo que v asignará a las variables presentes directamente en $\tau$ expresiones de $E_n$; con lo que por el lema 1.3.3 $v(\tau)\varepsilon E_n$, y dado que la única variable crítica en $\xi(\alpha)$ que no es crítica en $\xi(\tau)$ es $\alpha$; al tenerse que $v'\varepsilon G_n[K\{\xi(\tau)\}]$ y $v'(\alpha)\varepsilon E_n$ se tiene $v'\varepsilon G_n[K\{\xi(\tau)\}]$. Con lo que el lema A.5.II.7.c. nos asegura que v debe de satisfacer $\xi(\tau)$ y que por lo tanto cualquier instancia de A.5.II. es logicamente verdadera.

Y ello finaliza la demostración del lema A.5.II.

<u>Corolario A.5.II.8.</u> Sea $\xi(\alpha)$ una expresión cualquiera; sea $\tau$ un término gramatical libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$. Entonces una

valoración v cualquiera satisfará $\xi(\tau)$ ssi la valoración v' $\alpha$-equivalente a v y tal que $v'(\alpha) = v(\tau)$ satisface $\xi(\alpha)$.

El corolario es evidente a partir de los lemas anteriores; pues siempre habrá un n tal que: $\xi(\alpha)\varepsilon E_{n+1}$; $\tau\varepsilon\Omega_n$ y $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi(\alpha)\rightarrow\xi(\tau)\}]$; basta escogerlo lo suficientemente grande.

Pero ello no nos capacita para decir que toda valoración v satisface toda instancia de A.5.II.

Supongamos que $\xi(\alpha)\varepsilon E_2 - E_1$; que $\tau$ es $\alpha$, siendo $\alpha$ crítica en $\xi(\alpha)$ y que v asigna a cualquier variable una expresión de $E_1$ salvo a la propia $\alpha$ que le asigna una expresión de $E_2$.

v satisfará $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ ssi toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_1[K\{\xi(\alpha)\}]$ satisface $\xi(\alpha)$. Pero entre estas valoraciones no se encuentra v' ya que $v'(\alpha) = v(\alpha)\varepsilon E_2$; por lo tanto aún cuando v satisfaga $\Lambda\alpha\xi(\alpha)$ no nos podemos servir del corolario para asegurar que satisface $\xi(\tau)$.

Pasado ya el lema A.5.II los siguientes son más sencillos.

A.6.I. Lema

Todas las instancias de la primera versión del esquema axiomático A.6 son logicamente auténticas. Recordemos que este esquema axiomático es:

$[\Lambda x(\xi_1 \rightarrow \xi_2)] \rightarrow [\xi_1 \rightarrow \Lambda x\xi_2]$ si $\xi_1$ no contiene apariciones libres de x.

La única forma en como una valoración v podría no satisfacer la expresión anterior sería que satisfaciese $\Lambda x(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ y no satisfaciese $\xi_1 \rightarrow \Lambda x\xi_2$. Para que esto sea posible v debe satisfacer $\xi_1$ y no satisfacer $\xi_2$. Es decir debe de haber una valoración w x-equivalente a v que no satisfaga $\xi_2$. Por otra parte, si v satisface $\Lambda x(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ significa que toda valoración x-equivalente a v y en particular w, satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$; pero por el lema 1.3.16, dado que v y w son x-equivalentes, $\xi_1$ no contiene a x libre y que v satisface $\xi_1$; se debe cumplir que w satisfaga $\xi_1$ y por tanto (al satisfacer $\xi_1 \rightarrow \xi_2$) que satisfaga $\xi_2$, contrariamente a lo dicho antes. Así pues, toda valoración v debe satisfacer toda instancia de A.6.I.

A.6.II. Lema

Todas las instancias de la segunda versión del esquema axiomático A.6 son logicamente auténticas.

En efecto, supongamos que hubiese una valoración v que no satisfaciese una instancia de dicho esquema axiomático; esto sólo sería posible porque satisfaciese $\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ pero no satisfaciese $\xi_1 \rightarrow \Lambda\alpha\xi_2$, lo cual a su vez sólo sería posible porque satisfaciese $\xi_1$ y no satisfaciese $\Lambda\alpha\xi_2$.

Si $\alpha$ no es crítica en $\xi_2$ la demostración es muy seniclla (gracias al lema A.4.II.1). Si v no satisface $\Lambda\alpha\xi_2$ es porque existe una valoración w $\alpha$-equivalente a v que no satisface $\xi_2$; pero al satisfacer $\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ ello supone que toda valoración $\alpha$-equivalente a v satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, entre ellas w; ahora bien, v también satisface $\xi_1$ y $\xi_1$ no contiene libre a $\alpha$, siendo w $\alpha$-equivalente a v esto significa por el lema 1.3.16 que w satisface $\xi_1$; y al satisfacer $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, también satisface $\xi_2$; luego obtenemos una contradicción y por lo tanto no es posible que v no satisfaga la instancia del esquema axiomático cuando $\alpha$ no es crítica en $\xi_2$.

En cosecuencia, supongamos que $\alpha$ es crítica en $\xi_2$.

Dado que $\xi_2$ contiene una variable crítica, entonces $\xi_2$

no puede pertenecer a $E_1$. Así pues, existirá un $m \geq 1$ tal que $\xi_2 \varepsilon E_{m+1} - E_m$. Por lo tanto, se tendrá que $\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \varepsilon E_{n+1} - E_n$, siendo $n \geq m$.

Con lo que se plantean las siguientes posibilidades:

a) $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)\}]$.

Por tanto, naturalmente $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$, pero hay varios subcasos:

- $n=m$; es decir $\Lambda\alpha\xi_2 \varepsilon E_{n+1} - E_n$; en tal caso el que v no satisfaga $\Lambda\alpha\xi_2$ significa que existe una valoración w α-equivalente a v tal que $w \varepsilon G_n[K\{\xi_2\}]$ y no satisface $\xi_2$, (caso <u>a</u> definición inductiva).

- $n>m$; a su vez hay varios subcasos:

- $v \varepsilon G_m[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$, con $\Lambda\alpha\xi_2 \varepsilon E_{m+1} - E_m$; en tal caso el que v no satisfaga $\Lambda\alpha\xi_2$ significa que existe una valoración w α-equivalente a v tal que $w \varepsilon G_m[K\{\xi_2\}]$ y no satisface $\xi_2$ (de nuevo caso <u>a</u> definición inductiva).

- $v \not\varepsilon G_m[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$; pero en tal caso existirá un s tal que $v \varepsilon (G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$ siendo $n \geq s$ y $s>m$, con lo que el que v no satisfaga $\xi_2$ significa que existe una valoración w α-equivalente a v y perteneciente a $G_s[K\{\xi_2\}]$ que no satisface $\xi_2$.

En resumen, podemos decir que existe una valoración w α-equivalente a v, que no satisface $\xi_2$ y tal que $w \varepsilon G_n[K\{\xi_2\}]$ (dado que $n \geq s$ y $n \geq m$).

Veamos en primer lugar que $w \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)\}]$: w es α-equivalente a v; α no es crítica en $\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ y $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)\}]$; por lo tanto $w \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \rightarrow \xi_2)\}]$ pero además, $w \varepsilon G_n[K\{\xi_1 \rightarrow \xi_2\}]$ dado que al ser α crítica en $\xi_2$ y ser

$w \varepsilon G_n[K\{\xi_2\}]$, w asigna a $\alpha$ una expresión de $E_n$ y por lo tanto $w \varepsilon G_n[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$.

Ahora bien, dado que v satisface $\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2)$, siendo $\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2) \varepsilon E_{n+1} - E_n$ y $v \varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2)\}]$, esto significa que toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ debe satisfacer $\xi_1 \to \xi_2$. Entre estas está w; luego w satisface $\xi_1 \to \xi_2$.

Por otra parte v satisface $\xi_1$; w es $\alpha$-equivalente a v y $\alpha$ no se halla libre en $\xi_1$; luego el lema 1.3.16 nos fuerza a que w satisfaga $\xi_1$ y por lo tanto a que w satisfaga $\xi_2$, lo que constituye una contradicción con lo dicho anteriormente.

Por lo que tampoco en este caso es posible que haya una valoración v que no satisfaga una instancia del esquema axiomático.

b) $v \not\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2)\}]$, pero en tal caso existirá un r, tal que se verifique que $v \varepsilon (G_r - G_{r-1})$ $[K\{\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2)\}]$ con $r > n \geq m$, habiendo dos subcasos:

- Si $v \varepsilon G_m[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$, entonces el que v no satisfaga $\Lambda\alpha\xi_2 \varepsilon E_{m+1} - E_m$ significa que hay una valoración $w \varepsilon G_m[K\{\xi_2\}]$ $\alpha$-equivalente a v, que no satisface $\xi_2$.

- Si $v \not\varepsilon G_m[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$, existirá un s tal que $v \varepsilon (G_s - G_{s-1})$ $[K\{\Lambda\alpha\xi_2\}]$ con $s \leq r$ y $m < s$; por lo tanto existirá una valoración $w \varepsilon G_s[K\{\xi_2\}]$ $\alpha$-equivalente a v que no satisfará $\xi_2$.

Así pues, en cualquier caso, existe una valoración $w \varepsilon G_r[K\{\xi_2\}]$ (dado que $r \geq s$ y $r > m$) $\alpha$-equivalente a v y que no satisface $\xi_2$. Por otra parte dado que $v \varepsilon (G_r - G_{r-1})$ $K[\Lambda\alpha\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ y $\Lambda\alpha(\xi_1 \to \xi_2) \varepsilon E_r$ $(r > n)$. Toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_r[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ debe satisfacer $\xi_1 \to \xi_2$; veámos que entre estas se encuentra w: en primer lugar w es $\alpha$-equivalente a v y en segundo lugar $\alpha$ es crítica en $\xi_2$ y $w\varepsilon G_r[K\{\xi_2\}]$ le asignará por tanto una expresión de $E_r$, luego $w\varepsilon G_r[K\{\xi_1\to\xi_2\}]$. Asi pues debe satisfacer $\xi_1\to\xi_2$. Por último el lema 1.3.16 de nuevo nos obliga a que satisfaga $\xi_1$, ya que v satisface $\xi_1$, w es $\alpha$-equivalente a v y $\alpha$ no aparece libre en $\xi_1$.

Así pues, w debe satisfacer $\xi_2$, pues satisface $\xi_1$ y $\xi_1\to\xi_2$. Esto contradice lo dicho anteriormente; es así que este caso tampoco se puede dar.

Ello finaliza la demostración del lema A.6.II, ya que hemos agotado todos los casos.

A.7.I. Lema

Todas las instancias de A.7.I son logicamente auténticas. Recordemos que este esquema axiomático era:

$$V(\tau) \to \neg V(\neg\tau)$$

consideremos una valoración cualquiera; si v satisface $V(\tau)$ es porque se verifica $\bar{V}(v(\tau))$; en cuyo caso no se puede verificar $\bar{V}(\neg v(\tau))$; es decir v no satisface $V(\neg\tau)$ y por lo tanto satisface $\neg V(\neg\tau)$.

Así pues, cualquier valoración debe satisfacer cualquier instancia de A.7.I y éstas son logicamente auténticas.

A.7.II. Lema

Todas las instancias de A.7.II son logicamente auténticas. Recordemos que este esquema axiomático es:

$\neg V(\neg\xi_1) \to V(\xi_1)$ si $\xi_1$ carece de variables libres.

Si una valoración satisface $\neg V(\neg\xi_1)$ es porque no satisface $V(\neg\xi_1)$; es decir, porque no se verifica $\bar{V}(v(\neg\xi_1))$

y como la valoración de una expresión es dicha expresión, esto es porque no se verifica $\bar{V}(\neg\xi_1)$. Pero por el corolario 1.3.18, al no tener $\xi_1$ variables libres y no verificarse $\bar{V}(\neg\xi_1)$ se ha de verificar $\bar{V}(\xi_1)$; es decir, v ha de satisfacer $V(\xi_1)$, con lo cual queda probado que toda valoración satisface cualquier instancia de A.7.II y que éstas por tanto son logicamente auténticas.

A.8.I. Lema

Todas las instancias de A.8.I son logicamente auténticas. Recordemos que A.8.I era:

$\xi_1 \rightarrow V(\xi_1)$ si $\xi_1$ carece de variables libres.

En efecto: si una valoración satisface $\xi_1$, entonces por el lema 1.3.17 toda valoración satisfará $\xi_1$ y por lo tanto $\xi_1$ será verdadera: se verificará $\bar{V}(\xi_1)$; es decir v satisfará $V(\xi_1)$; puesto que se verifica $\bar{V}(v(\xi_1))$ al ser $v(\xi_1) = \xi_1$.

A.8.II. Lema

Todas las instancias de A.8.II son logicamente auténticas. Recordemos que A.8.II era:

$V(\xi_1) \rightarrow \xi_1$ si $\xi_1$ carece de variables críticas.

En efecto, supongamos que v satisface $V(\xi_1)$; esto significa que se verifica $\bar{V}(v(\xi_1))$ es decir, que se verifica $\bar{V}(\xi_1)$; ahora bien, por el lema 1.3.21, una expresión $\xi_1$ sin variables críticas es verdadera ssi toda valoración la satisface. Por tanto, v satisfará $\xi_1$ y queda demostrado que cualquier valoración v satisface cualquier instancia de A.8.II.

A.9. Lema

Todas las instancias de A.9 son logicamente auténticas. Recordemos que este esquema axiomático era:

$$V(\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (V(\xi_1) \rightarrow V(\xi_2))$$

Si en caso de que $\xi_1$ contuviese variables críticas se verifica que:

1) Si $\xi_1 \varepsilon E_{h+1} - E_h$ y $\xi_2 \varepsilon E_{j+1} - E_j$, entonces $h \geq j$

2) Ninguna variable crítica en $\xi_1$ es al mismo tiempo libre y no crítica en $\xi_2$.

Una valoración v unicamente no satisfará una instancia de A.9, en caso de que satisfaciendo $V(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ no satisfaga $V(\xi_1) \rightarrow V(\xi_2)$; lo cual solo es posible si satisfaciendo $V(\xi_1$ no satisface $V(\xi_2)$.

Dado que una valoración satisface una expresión $V(\xi)$ ssi se verifica $\overline{V}(\xi)$,lo que hemos de demostrar es que si se verifican $\overline{V}(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ y $\overline{V}(\xi_1)$ se verifica $\overline{V}(\xi_2)$. Es decir debemos demostrar el sublema siguiente:

A.9.1. Sublema

Sean $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ dos expresiones verdaderas (es decir tales que se verifican $\overline{V}(\xi_1 \rightarrow \xi_2)$ y $\overline{V}(\xi_1)$, entonces, en caso de que $\xi_1$ contenga variables críticas, si se cumple que:

1) Si $\xi_1 \varepsilon E_{h+1} - E_h$ y $\xi_2 \varepsilon E_{j+1} - E_j$ entonces $h \geq j$

2) Ninguna variable crítica en $\xi_1$ es al mismo tiempo libre y no crítica en $\xi_2$; entonces se verifica que $\xi_2$ es verdadera, es decir, se verifica $\overline{V}(\xi_2)$.

Lo expresamos como lema aparte ya que haremos referencia posterior a este resultado.

Pongámonos primero en el caso de que $\xi_1$ carezca de variables críticas.

Si $\xi_2$ carece también de variables críticas entonces la demostración es muy sencilla: que $\xi_1$ sea verdadera significa que toda valoración la satisface; que lo sea $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ significa asimismo que toda valoración satisfará $\xi_1 \rightarrow \xi_2$. Si hubiese una valoración que no satisfaciese $\xi_2$, dicha valoración satisfaría $\xi_1$, $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ y no satisfaría $\xi_2$, lo cual no es posible.

Si $\xi_2$ tiene variables críticas, entonces supongamos que $\xi_1 \varepsilon E_{h+1}-E_h$ y $\xi_2 \varepsilon E_{j+1}-E_j$ llamemos $r=max(h,j)\geq 1$, ya que al poseer $\xi_2$ variables críticas no puede pertenecer a $E_1$, $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ $\varepsilon E_{r+1} - E_r$ evidentemente. Así pues:

$\xi_1$ verdadera significa que toda valoración satisface $\xi_1$.

$\xi_1 \rightarrow \xi_2$ verdadera significa que toda valoración perteneciente a $G_r[K\{\xi_1 \rightarrow \xi_2\}]$ satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$.

Hemos de demostrar que toda valoración perteneciente a $G_j[K\{\xi_2\}]$ satisface $\xi_2$. Supongamos que hubiese $v \varepsilon G_j[K\{\xi_2\}]$ tal que no satisfaciese $\xi_2$; como $j\leq r$, $v \varepsilon G_r[K\{\xi_2\}]$, además dado que $\xi_1$ carece de variables libres se tendrá $K\{\xi_1 \rightarrow \xi_2\} = K\{\xi_2\}$; luego $v \varepsilon G_r[K\{\xi_1 \rightarrow \xi_2\}]$ y por lo tanto debe satisfacer $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, asimismo (como toda valoración debe satisfacer $\xi_1$) es imposible que no satisfaga $\xi_2$. Por tanto, $\xi_2$ es verdadera.

Pongámonos ahora en el caso de que $\xi_1$ posea variables críticas. Se deben cumplir entonces los requisitos 1) y 2) anteriormente explicitados.

Supongamos $\xi_1 \varepsilon E_{h+1} - E_h$ y $\xi_2 \varepsilon E_{j+1} - E_j$; con lo que según 1) $h\geq j$. Naturalmente si $\xi_1$ posee variables críticas $h\geq 1$ por lo tanto que $\xi_1$ sea verdadera significa que toda valoración perteneciente a $G_h[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$. Analogamente que $\xi_1 \to \xi_2$ sea verdadera, dado que $\xi_1 \to \xi_2 \varepsilon E_{h+1} - E_h$, significará que toda valoración $v \varepsilon G_h[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ satisfará $\xi_1 \to \xi_2$.

Supongamos que existe una valoración $v \varepsilon G_j[K\{\xi_2\}]$ (o sencillamente perteneciente a G si j=0) que no satisface $\xi_2$. Veamos que hay una valoración u, tal que $u \varepsilon G[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$, que no satisface $\xi_2$. Si directamente $v \varepsilon G_h[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$, entonces no hay mas que hablar a este respecto; pero si $v \not\in G_h[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$, dado que v asigna a todas las variables críticas en $\xi_2$ expresiones de $E_h$ (si j=0 no hay variables críticas en $\xi_2$ y esto también es cierto), entonces el que $v \not\in G_h[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$ será debido a que v asigna a algunas variables críticas en $\xi_1$ y no críticas en $\xi_2$ expresiones que no son de $E_h$. Ahora bien, si dichas variables no son críticas en $\xi_2$, al serlo en $\xi_1$ según el apartado 2) tampoco pueden ser libres en $\xi_2$. Por lo tanto, consideremos cualquier valoración u que asigne a dichas variables expresiones de $E_1$ y sea por lo demás idéntica a v.

Dado que entonces u y v asignarán a todas las variables libres en $\xi_2$ las mismas expresiones (sólo difieren en lo que asignan a variables no libres en $\xi_2$), entonces por el lema 1.3.16 u satisfará $\xi_2$ ssi v satisface $\xi_2$. Es decir u no satisface $\xi_2$. Además es evidente que $u \varepsilon G_h[K\{\xi_1 \to \xi_2\}]$; por tanto tendremos:

- u debe satisfacer $\xi_1 \to \xi_2$.

- u debe satisfacer $\xi_1$ (pues pertenece a $G_h[K\{\xi_1\}]$.

- u no satisface $\xi_2$.

lo cual es manifiestamente imposible, por lo tanto no puede existir ninguna $v \varepsilon G_j[K\{\xi_2\}]$ (o sencillamente perteneciente a G ) que no satisfaga $\xi_2$. Es decir, $\xi_2$ es verdadera, lo cual demuestra el sublema A.9.1 y el teorema A.9.

A.10. Lema

Todas las instancias de ambas versiones de A.10 son logicamente auténticas.

Recordemos que estos esquemas axiomáticos eran:

a) $V(\xi_1) \rightarrow V(\Lambda x\ \xi_1)$

b) $V(\xi_1) \rightarrow V(\Lambda\alpha\ \xi_1)$

Una valoración v cualquiera no satisfará una instancia de los anteriores esquemas axiomáticos ssi satisfaciendo $V(\xi_1)$ no satisface $V(\Lambda x_1\ \xi_1)$ [o $V(\Lambda\alpha\xi_1)$ en su caso]; es decir, ssi siendo verdadera $\xi_1$ (verificándose $\bar{V}(v(\xi_1))$]) no es verdadera $\Lambda x\xi_1$ [o $\Lambda\alpha\xi_1$ en su caso]. Así pues, vamos a demostrar un par de lemas con los que quedará demostrado el teorema:

A.10.1. Sublema

Si $\xi_1$ es verdadera, entonces $\Lambda x\xi_1$ es verdadera.

En primer lugar supongamos que $\xi_1 \varepsilon E_1$; entonces que sea verdadera significa que toda valoración la satisface. Por otra parte para que sea verdadera $\Lambda x\xi_1$ es necesario que toda valoración v la satisfaga. Así pues, supongamos dada v, ésta satisfará $\Lambda x\xi_1$, ssi toda valoración w x-equivalente a v satisface $\xi_1$, lo cual es cierto, pues toda valoración satisface $\xi_1$, por tanto toda valoración satisfará $\Lambda x\varepsilon_1$ y esta es verdadera.

Supongamos que $\xi_1 \varepsilon E_{n+1} - E_n$, que sea verdadera (si $n>0$) significa que toda valoración $w \varepsilon G_n[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$.

Ahora bien para que $\Lambda x\ \xi_1$ sea verdadera, solo se necesita que toda valoración $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda x\xi_1\}]$ satisfaga $\Lambda x\xi_1$.

Consideremos una tal valoración v, para que satisfaga $\Lambda x\xi_1$ es necesario que toda valoración w x-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1\}]$ satisfaga $\xi_1$. Lo cual es cierto, ya que todas las pertenecientes a $G_n[K\{\xi_1\}]$ satisfacen $\xi_1$ independientemente de que sean o no x-equivalentes a v.

Así pues, toda valoración $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda x\xi_1\}]$ satisfará $\Lambda x\xi_1$ y está será verdadera.

Ello finaliza la demostración del sublema A.10.1.

A.10.2. Sublema

Si $\xi_1$ es verdadera, entonces $\Lambda\alpha\xi_1$ es también verdadera.

Si $\xi_1\varepsilon E_1$, entonces la demostración es la siguiente:

Que $\xi_1$ sea verdadera significa que toda valoración la satisface. Asimismo para que lo sea $\Lambda\alpha\xi_1$ toda valoración ha de satisfacerla. Supongamos una valoración v; dicha valoración satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración α-equivalente a v satisface $\xi_1$;pero dado que toda valoración satisface $\xi\varepsilon_1$ (con independencia de que sea o no α-equivalente a v) entonces v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ evidentemente. Y por lo tanto (como v es genérica) $\Lambda\alpha\xi_1$ será verdadera.

Si $\xi_1\varepsilon E_{n+1} - E_n$ (con $n\geq1$), la demostración es como sigue:

Que $\xi_1$ sea verdadera significa que toda valoración $w\varepsilon G_n[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$. Para que $\Lambda\alpha\xi_1$ sea verdadera hay que demostrar que toda valoración $v\varepsilon G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$ la satisface.

Ahora bien una tal valoración v satisfará $\Lambda\alpha\xi_1$ ssi toda valoración $\alpha$-equivalente a v y perteneciente a $G_n[K\{\xi_1\}]$ satisface $\xi_1$; pero como las valoraciones pertenecientes a $G_n[K\{\xi_1\}]$ satisfacen $\xi_1$ independientemente de si son o no $\alpha$-equivalentes a v, entonces es evidente que v debe satisfacer $\Lambda\alpha\xi_1$ y, por tanto, como v es genérica dentro de $G_n[K\{\Lambda\alpha\xi_1\}]$) $\Lambda\alpha\xi_1$ será verdadera.

Ello finaliza la demostración del sublema A.10.2 y con ello la del lema A.10.

A.11. Lema

Todas las instancias de cualquier versión de A.11 son logicamente auténticas. Recordemos que estos esquemas axiomáticos eran:

I) $V(\xi_1) \to V(V(\xi_1))$

II) $V(V(\xi_1)) \to V(\xi_1)$

Empecemos por A.11.I): es evidente que una valoración cualquiera satisfará una instancia de A.11.I ssi en caso de satisfacer $V(\xi_1)$ satisface $V(V(\xi_1))$, es decir, si en caso de ser $\xi_1$ verdadera es verdadera $V(\xi_1)$. Demostremos pues el siguiente sublema:

A.11.1. Sublema

Si $\xi_1$ es verdadera entonces $V(\xi_1)$ es auténtica:

Si $\xi_1$ es verdadera significa que se verifica $\bar{V}(\xi_1)$. Por otra parte para que una valoración cualquiera satisfaga $V(\xi_1)$, se ha de verificar $\bar{V}(v(\xi_1))$ es decir $\bar{V}(\xi_1)$. Luego toda valoración satisface $V(\xi_1)$.

Veamos ahora A.11.II: una valoración cualquiera satisfará una instancia de A.11.II si en caso de satisfacer

$V(V(\xi_1))$ satisface $V(\xi_1)$; es decir, si en caso de que sea verdadera $V(\xi_1)$ es verdadera $\xi_1$. Probemos el siguiente sublema:

A.11.2. Sublema

Si $V(\xi_1)$ es verdadera entonces $\xi_1$ es verdadera.

En efecto; dado que $V(\xi_1)$ es verdadera al carecer de variables libres, ello significa que es satisfecha por toda valoración. Para que una valoración cualquiera v satisfaga $V(\xi_1)$ se ha de verificar $\bar{V}(v(\xi_1))$, es decir, se ha de verificar $\bar{V}(\xi_1)$ o, lo que es lo mismo, $\xi_1$ ha de ser verdadera. Ello demuestra el sublema y por tanto el lema A.11.

Asimismo ello finaliza la demostración del teorema 2.2.2.

2.3.2. Lema

Si en el Modus Ponens $\xi_1$ y $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ son verdaderas entonces la conclusión $\xi_2$ es verdadera.

Este lema es evidente a partir del sublema A.9.1.

2.3.3. Lema

Si en el Modus Ponens Forte $\xi_1$ y $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ son auténticas la conclusión $\xi_2$ es auténtica.

En efecto, si una valoración cualquiera v satisface $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ y además satisface $\xi_1$ debe satisfacer $\xi_2$ (lema 1.3.11.)

2.3.4. Lema

Si $\xi_1$ es verdadera [auténtica] entonces la aplicación de la regla de generalización en cualquiera de sus dos versiones da lugar a otra expresión verdadera [auténtica].

Lo que el lema afirma respecto a expresiones verdaderas es evidente a partir de los sublemas A.10.1. y A.10.2. Así pues, sólo hay que demostrarlo para expresiones auténticas.

Generalización respecto de variables individuales:

Si $\xi$ es auténtica significa que toda valoración la satisface; para que $\Lambda x\xi$ lo sea asimismo, toda valoración v debe satisfacerla; v satisfará $\Lambda x\xi$ ssi toda v' x-equivalente a v satisface $\xi$ cosa que evidentemente ocurre. La generalización respecto de variables gramaticales admite una demostración igualmente sencilla en principio, si bien simplemente hay que considerar más casos.

2.3.5. Lema

Si $\xi$ es verdadera, entonces la aplicación de la regla de corroboración directa da lugar a una expresión auténtica y viceversa.

Si $V(\xi_1)$ es auténtica, la aplicación de la regla de corroboración inversa da lugar a una expresión verdadera.

Este lema es evidente a partir de los sublemas A.11.1. y A.11.2.

2.4.2 Teorema

De este teorema sólo debíamos demostrar la parte principal; es decir lo siguiente:

Sea S una extensión axiomática de $S_b$ y sea $\xi_c$ una expresión sin variables libres. Entonces:

Si $\xi_C \underset{S}{\overset{A}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}} \xi$, asimismo $\underset{S}{\overset{A}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}} \xi_C \rightarrow \xi$

Y

Si $\xi_C \underset{S}{\overset{B}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}} \xi$, asimismo $\underset{S}{\overset{B}{\vdash\!\!\!\longrightarrow}} \xi_C \rightarrow V(\xi)$

Naturalmente suponemos que $\xi_C$ es incluído como axioma A; pero en cualquier caso sería teorema A de la extensión de S, al carecer de variables libres.

Por tanto, supongamos que nos den una demostración de $\xi$ a partir de $\xi_C$; vamos a ver por inducción sobre la longitud de las demostraciones en $S \cup \{\xi_C\}$ que en S podemos demostrar bien $\xi_C \rightarrow \xi$ o $\xi_C \rightarrow V(\xi)$ en cada caso.

Paso base:

Se presentan los casos siguientes:

1) $\xi$ es un axioma A de S.

1. $\xi$ Axioma de S

2. $\xi \rightarrow (\xi_C \rightarrow \xi)$ Axioma A.1

3. $\xi_C \rightarrow \xi$ M.P.F. 1;2

2) $\xi$ es un axioma B de S

1. $\xi$

2. $V(\xi)$ Corroboración dir.

3. $V(\xi) \to (\xi_C \to V(\xi))$ Axioma A.1

4. $\xi_C \to V(\xi)$ M.P. 2;3: $V(\xi)$ carece de variables críticas.

Paso de inducción:

Supuesto válido el teorema para todas las demostraciones de menos de n pasos, veamos que es válido para las de n; asimismo hay varios casos:

1) Si $\xi$ tiene una demostración B de n pasos descomponible según la forma:

$$\begin{array}{l} \xi_{1,1},\ldots\ldots\ldots\ldots,\xi_{1,n_1} \\ \xi_{2,1},\ldots\ldots\ldots\ldots,\xi_{2,n_2} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \xi_{m_1},\ldots\ldots\ldots\ldots,\xi_{m,n_m} \end{array}$$

con $\xi_{m,n_m} \equiv \xi$

Las expresiones $\xi_{1,n_1},\ldots\ldots\ldots,\xi_{m-1,n_{m-1}}$ tienen demostraciones de menos de n pasos; luego por hipótesis de inducción en S son demostrables:

$$\xi_C \to V(\xi_{1n_1}),\ldots\ldots\ldots,\xi_C \to V(\xi_{m-1,n_{m-1}}).$$

Asimismo todas las expresiones $\xi_{m_j}$, con $j<n_m$ tienen demostraciones de menos de n pasos; luego también es

demostrable en S:

$$\xi_C \to V(\xi_{m_1}),\ldots\ldots\ldots\ldots,\xi_C \to V(\xi_{m,n_{m-1}})$$

$\xi$ puede ser o un axioma, o una de las anteriores expresiones (en cuyo caso ya estaría todo hecho) o deducirse de las anteriores expresiones por M.P., generalización o corroboración. Veamos cada caso:

a) M.P.: Se tratará entonces de un paso de la forma:

$$\begin{array}{l} \xi_a \to \xi \\ \xi_a \\ \hline \xi \end{array}$$

Verificándose además que en caso de que $\xi_a$ posea variables críticas se cumplirá que:

- Si $\xi_a \varepsilon (E_{h+1} - E_h)$ y $\xi\ \varepsilon (E_{j+1} - E_j)$; $h \geq j$

- Ninguna variable crítica en $\xi_a$ es libre y no crítica en $\xi$.

Pero por hipótesis de inducción serán teoremas B de S:

1) $\xi_C \to V(\xi_a \to \xi)$

2) $\xi_C \to V(\xi_a)$

Pero además A.9. nos garantiza que es teorema.

3) $v(\xi_a \to \xi) \to (V(\xi_a) \to V(\xi))$.

Debido a que las condiciones que debe cumplir el M.P. antes de aplicarse son las mismas que exige A.9. Por otra parte obsérvese que ninguna de estas tres expresiones posee variables libres, luego no va a haber problemas en los pasos sucesivos por aplicación de M.P.

4. $[\xi_C \to V(\xi_a \to \xi)] \to \{[V(\xi_a \to \xi) \to (V(\xi_a) \to V(\xi))] \to [\xi_C \to \{V(\xi_a) \to V(\xi)\}]\}$

Tautología del cálculo de proposiciones: $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ ver lema 2.4.3.

5. $[V(\xi_a \to \xi) \to \{V(\xi_a) \to V(\xi)\}] \to [\xi_C \to \{V(\xi_a) \to V(\xi)\}]$ M.P. 1,4

6. $\xi_C \to [V(\xi_a) \to V(\xi)]$ M.P. 3,5

7. $[\xi_C \to \{V(\xi_a) \to V(\xi)\}] \to [\{\xi_C \to V(\xi_a)\} \to \{\xi_C \to V(\xi)\}]$

Tautología del cálculo de proposiciones: $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

8. $[\xi_C \to V(\xi_a)] \to [\xi_C \to V(\xi)$ M.P. 7,6

9. $\xi_C \to V(\xi)$ M.P. 8,2

b) Generalización:

$$\frac{\xi_1}{\Lambda x \xi_1}$$ Donde $\Lambda x \xi_1 \equiv \xi$

1. $\xi_C \to V(\xi_1)$

2. $V(\xi_1) \to V(\Lambda x \xi_1)$ A.10.I.

3. $[\xi_C \to V(\xi_1)] \to [\{V(\xi_1) \to V(\Lambda x \xi_1)\} \to \{\xi_C \to V(\Lambda x \xi_1)\}]$

Tautología del cálculo de proposiciones (silogismo hipotético: $(p \to q)\to[(q \to r)\to(p \to r)]$

4. $[V(\xi_1) \to V(\Lambda x\xi_1)] \to [\xi_C \to V(\Lambda x\xi_1)]$ M.P. 1.3.

5. $\xi_C \to V(\Lambda x\xi_1)$

En caso de generalización, pero respecto de variables gramaticales, la demostración es análoga,sólo que utilizando A.10.II.

c) Corroboración

c.1: Directa:

$$\frac{\xi_1}{V(\xi_1)} \qquad V(\xi_1) \equiv \xi$$

Pero:

1. $\xi_C \to V(\xi_1)$ Hipótesis inducción

2. $V(\xi_1) \to V(V(\xi_1))$ A.11.I.

y por silogismo hipotético se deduce inmediatamente:

$\xi_C \to V(V(\xi_1))$

c.2: Inversa:

$$\frac{V(\xi)}{\xi}$$

Pero:

$\xi_C \rightarrow V(V(\xi))$ Hipótesis inducción

$V(V(\xi)) \rightarrow V(\xi)$ A.11.II.

y por silogismo hipotético también se obtiene inmediatamente:

$\xi_C \rightarrow V(\xi)$

2) El segundo caso dentro del paso de inducción es el de expresiones que poseen una demostración de autenticidad descomponible de la forma:

$$\xi_{1,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{1,n_1}$$

$$\xi_{2,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{2,n_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\xi_{m-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{m-1,n_{m-1}}$$

$$\xi_{m}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{m,n_m}$$

siendo $\xi_{m,n_m} \equiv \xi$

Analogamente al caso anterior, por hipótesis de inducción, existirán en S demostraciones de:

$$\xi_C \rightarrow \xi_{1,n_1}, \ldots\ldots\ldots, \xi_C \rightarrow \xi_{m-1,n_{m-1}}$$

ya que todas las expresiones $\xi_{1,n_1}, \ldots\ldots, \xi_{n-1,m_{n-1}}$ poseen demostraciones de menos de n pasos. Asimismo, por hipótesis de inducción también serán demostrables en S.

$$\xi_C \rightarrow \xi_{m_1}, \ldots\ldots\ldots, \xi_C \rightarrow \xi_{m,n_{m-1}}$$

pues $\xi_{m_1}, \ldots\ldots\ldots, \xi_{m,n_{m-1}}$ también poseen demostraciones de menos de n pasos. $\xi$ puede ser, o bien una de las expresiones anteriores, o bien un axioma (en cuyo caso no habría más que decir), o deducirse mediante M.P.F., generalización o corroboración directa de las anteriores.

a) M.P. Forte;

Necesariamente las expresiones anteriores han de ser de la forma:

$\xi_a \rightarrow \xi$

$\xi_a$

pero por H.I. tendremos que serán teoremas A:

$\xi_C \rightarrow (\xi_a \rightarrow \xi)$

$\xi_C \rightarrow \xi_a$

pero

$[\xi_C \rightarrow (\xi_a \rightarrow \xi)] \rightarrow [(\xi_C \rightarrow \xi_a) \rightarrow (\xi_C \rightarrow \xi)]$ A.2. y con dos aplicaciones de M.P.F. se logra:

$\xi_C \rightarrow \xi$

b) Generalización:

$$\frac{\xi_1}{\Lambda x \xi_1} \qquad \Lambda x \xi_1 \equiv \xi$$

Analogamente tendremos:

$\xi_C \rightarrow \xi_1$ H.I.

$\wedge x(\xi_C \rightarrow \xi_1)$ Generalización

$\wedge x(\xi_C \rightarrow \xi_1) \rightarrow (\xi_C \rightarrow \wedge x\xi_1)$ A.6.I.

(ya que $\xi_C$ carece de variables libres).

y tras el M.P.F. se logra $\xi_C \rightarrow \wedge x\xi_1$.

Análogamente se realiza con variables gramaticales, pero empleando A.6.II.

c) Corroboración directa:

$$\frac{\xi_1}{V(\xi_1)} \qquad (V(\xi_1) \equiv \xi)$$

$\xi_C \rightarrow \xi_1$ Hipótesis de inducción

$V(\xi_C \rightarrow \xi_1)$ Corroboración directa

$V(\xi_C \rightarrow \xi_1) \rightarrow (V(\xi_C) \rightarrow V(\xi_1))$ A.9. ($\xi_C$ carece de variables libres)

$V(\xi_C) \rightarrow V(\xi_1)$ (Por M.P.F.)

$\xi_C \rightarrow V(\xi_C)$ A.8.I.

y tras el silogismo hipotético entre las dos expresiones anteriores se obtiene:

$\xi_C \rightarrow V(\xi_1)$

Ya sólo nos quedan dos casos dentro del paso de inducción:

3) Que $\xi$ sea teorema B de $S_C + \xi_C$ porque posea una demostración de autenticidad (descomponible en la forma dada por la definición, punto quinto). Pero acaba de ser demostrado que en tal caso en S es teorema A $\xi_C \to \xi$

por lo que también serán teoremas A (y B):

$V(\xi_C \to \xi)$ corroboración

$V(\xi_C \to \xi) \to (V(\xi_C) \to V(\xi))$ A.9

$V(\xi_C) \to V(\xi)$ M.P.F. anteriores

$\xi_C \to V(\xi_C)$ A.8.I.

Tras el silogismo hipotético entre estas últimas se obtiene que es teorema A (y por lo tanto B):

$\xi_C \to V(\xi)$

4) Que $\xi$ sea teorema A de $S + \xi_C$ por poseer una demostración de veracidad y carecer de variables críticas; en dicho caso acabamos de ver (apartado 1) que es teorema B:

$\xi_C \to V(\xi)$

pero $V(\xi) \to \xi$ (A.8.II)

luego tras silogismo hipotético:

$\xi_C \to \xi$

será teorema B, y por carecer $\xi$ de variables libres así como $\xi_C$, también será teorema A.

c.q.d.

2.5.2. Lema

Si $\xi_1$ es teorema A de $S_G$ entonces también es teorema A( y B) TA($\xi_1$). Analogamente si $\xi_2$ es teorema B (y A) TB($\xi_2$).

La demostración es por inducción sobre la longitud de las demostraciones en $S_G$.

<u>Paso base</u>:

Si la demostración en $S_G$ consta de un sólo paso, la expresión considerada será un axioma de $S_G$ y el paso de inducción en la definición de $S_G$ nos garantiza que si es un axioma A, TA($\xi$) también es axioma (y por lo tanto teorema), y si es un axioma B, también TB($\xi$) es axioma.

<u>Paso de inducción</u>:

Supongamos el lema demostrado para todas las expresiones que posean una demostración de menos de n pasos y veámoslo para n. Hay varios casos:

1) $\xi$ posee una demostración de autenticidad descomponible de la forma:

$$\begin{array}{lcl} \xi_{1,1}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ,\xi_{1,n_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \xi_{m_1}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ,\xi_{m,n_m} \end{array}$$

siendo $\xi_{m,n_m} \equiv \xi$. Naturalmente por hipótesis de inducción son demostrables en $S_G$:

$TA(\xi_{1,n_1}),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,TA(\xi_{m-1,n_{m-1}})$

y

$TA(\xi_{m,1}), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, TA(\xi_{m,n_{m-1}})$

pues todas esas expresiones poseen demostraciones A de menos de n pasos. Se presentan varias posibilidades (aparte naturalmente de que $\xi$ sea una de dichas expresiones $\xi_{ij}$ o un axioma, en cuyo caso no habría mas que decir).

a) $\xi$ se deduce mediante M.P.F. de dos expresiones anteriores; estas naturalmente serán de la forma:

$\xi_a \rightarrow \xi$

$\xi_a$

pero por hipótesis H.I. tendremos que en $S_G$ serán teoremas A:

$TA(\xi_a \rightarrow \xi)$

$TA(\xi_a)$

pero por el axioma propio I.2.c.:

$TA(\xi_a \rightarrow \xi) \rightarrow [TA(\xi_a) \rightarrow TA(\xi)]$

tras dos M.P.F. obtenemos $TA(\xi)$.

b) $\xi$ se deduce mediante generalización de una expresión anterior:

$$\frac{\xi_1}{\Lambda x \xi_1} \qquad \xi \equiv \Lambda x \xi_1$$

Tendremos:

$TA(\xi_1)$ Hip. ind.

$TA(\xi_1) \rightarrow TA(\wedge x\xi_1)$ I.2.b.

$TA(\wedge x\xi_1)$ M.P.F.

Analogamente se hace para variables gramaticales.

c) Corroboración directa:

$$\frac{\xi_1}{V(\xi_1)} \qquad V(\xi_1) \equiv \xi$$

$TA(\xi_1)$ Hip. ind.

$TA(\xi_1) \rightarrow TB(\xi_1)$ I.2.a.

$TB(\xi_1) \rightarrow TA(V(\xi_1))$ I.2.e.

y tras el silogismo hipotético de las dos últimas expresiones, se logra $TA(V(\xi_1))$ aplicando M.P. con la primera (o bien dos M.P. seguidos).

2) $\xi$ posee una demostración B en $S_G$ descomponible de la forma:

$$\begin{array}{lcl} \xi_{1,1}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \xi_{1,n_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \xi_{m_1}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \xi_{m,n_m} \end{array} \qquad (\xi_{m,nm} \equiv \xi)$$

Donde por hipótesis de inducción deberán ser teoremas A:

$TB(\xi_{1,n_1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots TB(\xi_{m-1,n_{m-1}})$

y

$TB(\xi_{m_1})$ .................. $TB(\xi_{m,n_{m-1}})$

Se presentan igualmente varias posibilidades (dejando aparte naturalmente el que $\xi$ sea un axioma o una de las anteriores $\xi_{i,j}$):

a) $\xi$ se deduce mediante M.P. de dos expresiones anteriores:

$$\begin{array}{l} \xi_a \rightarrow \xi \\ \xi_a \\ \hline \xi \end{array}$$

donde en caso de que $\xi_a$ posea variables críticas, se verificará:

- Si $\xi_a \varepsilon (E_{h+1} - E_h)$ y $\xi \varepsilon (E_{j+1} - E_j)$; $h \geq j$

- Ninguna variable crítica en $\xi_a$ es libre y no crítica en $\xi$.

Pero entonces:

$TB(\xi_a)$ H.I.

$TB(\xi_a \rightarrow \xi)$ H.I.

$TB(\xi_a \rightarrow \xi) \rightarrow [TB(\xi_a) \rightarrow TB(\xi)]$ I.2.d.

ya que se verifican las condiciones necesarias para que esta expresión responde a dicho esquema axiomático; y tras dos M.P.F. con las anteriores se logra $TB(\xi)$.

b) $\xi$ se obtiene por generalización de una expresión anterior:

$$\frac{\xi_1}{\Lambda x \xi_1} \qquad \Lambda x \xi_1 \equiv \xi$$

$TB(\xi_1)$ H.I.

$TB(\xi_1) \rightarrow TB(\Lambda x \xi_1)$ I.2.b.

$TB(\Lambda x \xi_1)$ M.P.F. anteriores

y analogamente en el caso de variables gramaticales.

c) Corroboración:

c.1. Directa:

$$\frac{\xi_1}{V(\xi_1)} \qquad V(\xi_1) \equiv \xi$$

$TB(\xi_1)$ H.I.

$TB(\xi_1) \rightarrow TA(V(\xi_1))$ I.2.e.

$TA(V(\xi_1))$ M.P.F.

$TA(V(\xi_1 \rightarrow TB(V(\xi_1))$ I.2.a.

$TB(V(\xi_1))$ M.P.F.

b) Inversa:

$$\frac{V(\xi)}{\xi}$$

$TB(V(\xi))$

$TB(V(\xi)) \rightarrow TA(V(\xi))$ I.2.a.

al carecer $V(\xi)$ de variables libres:

$TA(V(\xi))$ M.P.F.

$TA(V(\xi)) \rightarrow TA(\xi)$ I.2.e.

$TB(\xi)$ M.P.F.

Ya solo nos quedan pues dos casos:

3) Que $\xi$ sea teorema A de $S_G$ por ser una expresión sin variables críticas y poseer una demostración de veracidad (de n pasos y descomponible en la forma que hemos tratado anteriormente). Pero en dicho caso ha sido demostrado que es teorema A.

$TB(\xi)$

y por I.2.a.:

$TB(\xi) \rightarrow TA(\xi)$

Aplicable ya que $\xi$ carece de variables críticas. Por último,por M.P.F.:

$TA(\xi)$

4) Que $\xi$ sea teorema B de $S_G$ por poseer una demostración de autenticidad de n pasos. Pero en tal caso ha sido demostrado que en $S_G$ es teorema.

$TA(\xi)$

y segun I.2.a.

$TA(\xi) \rightarrow TB(\xi)$

luego por M.P.F. se obtiene:

$TB(\xi)$

lo cual demuestra el lema al agotar los casos

3.3.2.Lema

Para todo termino individual T y toda valóración v, si v' es la valoración x-equivalente a v tal que $v'(x)=v(t)$ siendo t un nombre individual o una variable, se verificara que: $T/v'=T_{x/t}/v$.

La demostración se realiza por inducción sobre el número de letras de función que T contiene.

Paso base:

- Nombres individuales
  $m/v'=m$
  $m_{x/t}/v=m/v=m$
- Variables; hay dos casos según se trate de la propia x o no.
  a) $y \neq x$
     $y/v'=v'(y)$
     $y_{x/t}/v=y/v=v(y)$
     Pero $v(y)=v'(y)$, por ser x-equivalentes.
  b) La propia x
     $x/v'=v'(x)$
     $x_{x/t}/v=t/v$
     Pero a su vez hay dos casos:
     b.1) t es un nombre individual n.
          $t/v=n/v=n$
          Pero además, $v'(x)=v(t)=v(n)=n$

b.2) t es una variable y

$t/v=y/v=v(y)$

Pero, $v'(x)=v(t)=v(y)$

Asi pues, en cualquiera de los dos casos se verifica que $x/v'=x_{x/t}/v$

Paso de inducción:

Supuesto el lema demostrado para todos los términos con menos de n letras de función, veámoslo para n.

$f_n^m(t_1,\ldots,t_m)/v'=f_n^m(t_1/v',\ldots,t_m/v')=$
$f_n^m(t_{1x/t}/v,\ldots,t_{mx/t}/v)=[f_n^m(t_{1x/t},\ldots,t_{mx/t})]/v=$
$[f_n^m(t_1,\ldots,t_m)]_{x/t}/v$

3.3.3. Lema

Sean v y v' dos valoraciones x-equivalentes tales que $v'(x)=v(t)$, siendo $\xi(x)$ una expresión en la cual t está libre para x y además tal que x no posea apariciones indirectas en $\xi(x)$ si t no es ni una constante ni una variable; entonces, v' satisface $\xi(x)$ ssi v satisface $\xi(t)$.

Se demuestra por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores de la expresión $\xi(x)$.

a) Expresiones atómicas, $\xi(x)$ es de la forma:

$F_r^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\tau_1,\ldots,\tau_q)$

Entonces v' satisfará $\xi(x)$ ssi se verifica:

$\bar{F}_r^{p,q}[v'(t_1),\ldots,v'(t_p);\tau_1/v',\ldots,\tau_q/v']$

Mientras que $\xi(t)$ es:

$F_r{}^{p,q}(t_{1x/t},\ldots,t_{px/t};\tau_{1x/t},\ldots,\tau_{qx/t})$

Entonces v satisface $\xi(t)$ ssi se verifica:

$\bar{F}_r{}^{p,q}(v(t_{1x/t}),\ldots,v(t_{px/t});\tau_{1x/t}/v,\ldots,\tau_{qx/t}/v)$

Ya se sabe que $v'(t_i)=v(t_{ix/t})$, de hecho es el sublema A.5.I.1; por lo que sólo hay que demostrar que si x aparece libre en $\tau/v'=\tau_{x/t}/v$. Pero obsérvese que si x aparece libre en $\tau$, necesariamente se trata de una aparición indirecta y en tal caso t sólo puede ser un nombre individual o una variable (si x no aparece libre en $\tau$ entonces $\tau_{x/t}= \tau$ y $\tau/v'$ y $\tau/v$ son el mismo término gramatical al ser v y v' x-equivalentes ). Para el caso en que aparezca libre, ya sabemos por el lema 3.3.2. que para cualquier término individual T se verifica que $T/v'= T_{x/t}/v$.

Con ello ya es fácil demostrar por inducción sobre el número de conectivas y/o cuntificadores y/o letrs de predicado que $\tau_{x/t}/v = \tau/v'$.

Paso base:

Ninguna conectiva, ni cuantificador, ni letras de predicado: el término tine que ser una variable gramátical $\alpha$.

$\alpha_{x/t}/v= \alpha/v= \alpha/v'$

Ya que $v(\alpha)=v'(\alpha)$ por ser x-equivalentes.

Paso de inducción:

$G_n{}^{r,s}(t_1,\ldots,t_r;\tau_1,\ldots,\tau_s)$

Tendremos que:

$\tau_{x/t}/v = G_n{}^{r,s}((t_1)/v,\ldots,(t_r)/v;\tau(_1)/v,\ldots,(\tau_s)/v)$

Por otra parte $\tau/v'$ será:

$$G_n^{r,s}(t_1/v',\ldots,t_r/v';\tau_1/v',\ldots,\tau_s/v')$$

pero ya sabemos que $T/v' = t_{x/t}/v$ y además por hipótesis de inducción $\tau/v' = \tau_{x/t}/v$.

b) Términos gramaticales "compuestos"; hay varios casos:

b.1. De la forma $\neg\tau$

$$(\neg\tau)_{x/t}/v = \neg(\tau_{x/t}/v) = \neg(\tau/v') = (\neg\tau)/v'$$

b.2. De la forma $\tau_1 \to \tau_2$:

$$(\tau_1 \to \tau_2)_{x/t}/v = (\tau_{1x/t}/v \to \tau_{2x/t}/v) =$$
$$(\tau_1/v' \to \tau_2/v') = (\tau_1 \to \tau_2)/v'$$

b.3. De la forma $\Lambda y\tau$. Hay de hecho dos casos:

- $y \equiv x$

  $x$ no está libre y $\Lambda x\tau_{x/t} = \Lambda x\tau$ además $\Lambda x\tau/v = \Lambda x\tau/v'$, por no estar libre $x$ y ser $x$-equivalentes.

- $y \not\equiv x$

  Naturalmente $t$ no contiene a $y$ pues ha de estar libre para $x$. Dado que por hipótesis de inducción $\tau_{x/t}/v = \tau/v'$ la única diferencia entre $\Lambda y(\tau_{x/t}/v)$ y $(\Lambda y\tau)_{x/t}/v$ es que en la segunda expresión $y$ no ha sido sustituida en sus apariciones libres en $\tau$. La misma diferencia hay entre $\Lambda y\tau/v'$ y $(\Lambda y\tau)/v'$. Como los primerso términos son iguales entre si los segundos también lo han de ser ($t$ no introduce ninguna aparición libre de $y$).

b.4. De la forma $\Lambda\alpha\tau$:

Se razona de forma similar al último caso

Dado que por hipótesis de inducción $\tau_{x/t}/v=\tau/v'$ la única diferencia entre $\Lambda\alpha(\tau_{x/t}/v)$ y $(\Lambda\alpha\tau)_{x/t}/v$ es que en la segunda expresión $\alpha$ no ha sido sustituída en sus apariciones libres en $\tau$. La misma diferencia hay entre $\Lambda\alpha\tau/v'$ y $(\Lambda\alpha\tau)/v'$; cómo los primerso términos son iguales entre si los segundos también lo han de ser.

Ello acaba la demostración del lema.

3.3.4. Lema.

Sean $v$ y $v'$ dos valoraciones $\alpha$-equivalentes, tales que $v'(\alpha)=\tau/v$, entonces para cualquier término gramatical $\mu$ (con $\tau$ libre para $\alpha$ en $\mu$) se verifica:

$$\mu_{\alpha/\tau}/v=\mu/v'$$

La demostracíon es por inducción sobre los términos gramaticales (sobre el número de conectivas cuantificadores y/o letras de predicado).

Paso base:

variables gramaticales $\beta$; naturalmente hay dos casos:

- $\beta\neq\alpha$

$\beta/v'=v'(\beta)$

$\beta_{\alpha/\tau}/v=\beta/v=v(\beta)$

siendo v y v' $\alpha$-equivalentes $v'(\beta)=v(\beta)$.

- $\beta\equiv\alpha$

$\alpha/v'=v'(\alpha)$

$\alpha_{\alpha/\tau}/v=\tau/v=v'(\alpha)$ por hipótesis.

Paso de inducción:

a. Expresiones atómicas.

$G_n{}^{r,s}(t_1,\ldots,t_r;\tau_1,\ldots,\tau_s)/v'=$

$=G_n{}^{r,s}(t_1/v',\ldots,t_r/v';\tau_1/v',\ldots,\tau_s/v')$

$[G_n{}^{r,s}(t_1,\ldots,t_r;\tau_1,\ldots,\tau_s)]_{\alpha/\tau}/v=$

$=G_n{}^{r,s}(t_{1\alpha/\tau}/v,\ldots,t_{r\alpha/\tau}/v;\tau_{1\alpha/\tau}/v,\ldots,\tau_{s\alpha/\tau}/v)$

Pero $t_{i\alpha/\tau}/v=t_i/v=t_i/v$, ya que $\alpha$ no puede aparecer libre en un término individual y además v y v' son $\alpha$-equivalentes. Por otra parte $\tau_{i\alpha/\tau}/v=\tau_i/v'$; por hipótesis de inducción.

b. Términos compuestos; hay varios casos:

b.1. Términos de la forma $\neg\mu$:

$(\neg\mu_1)_{\alpha/\tau}/v = \neg(\mu_{1\alpha/\tau}/v) = \neg(\mu_1/v') = (\neg\mu_1)/v'$

b.2. De la forma $\mu_1\rightarrow\mu_2$: se demuestra de forma análoga.

b.3. De la forma $\Lambda x\mu_1$.

Por hipótesis de inducción se tiene que:

$(\mu_{1\alpha/\tau})/v = (\mu_1)/v'$.

$(\mu_{1\alpha/\tau})/v$ y $\Lambda x(\mu_{1\alpha/\tau})/v$ sólo se diferencian en que en la segunda, x no se ha sustituído por v(x) (aparte del cuantificador, claro está). Lo mismo ocurre entre $(\mu_1)/v'$ y $\Lambda x(\mu_1)/v'$ como $\tau$ debe estar libre para $\alpha$, no contiene a x por lo que no se añaden nuevas x al sustutuir $\alpha$ por $\tau$. Asi pues, como los primeros términos de las parejas anteriores son iguales entre si, los segundos también deben serlo.

b.4. De la forma $\Lambda\beta\mu_1$. Naturalmente hay dos casos:

I. $\alpha\equiv\beta$, es decir, el término gramatical es $\Lambda\alpha\mu_1$; naturalmente, por hipótesis de inducción $(\mu_{1\alpha/\tau})/v=(\mu_1)/v'$. La única diferencia entre $(\Lambda\alpha\mu_1)_{\alpha/\tau}/v$ y $\Lambda\alpha(\mu_{1\alpha/\tau})/v$ es que en la primera las apariciones libres no directas de $\alpha$ en $\tau$ no son sustituidas mientras que en la segunda si. La misma diferencia se presenta entre $(\Lambda\alpha\mu_1)/v'$ y $\Lambda\alpha(\mu_1)/v'$. Dado que $\tau$ no puede introduccir nuevas apariciones libres no directas entonces, puesto que los primeros términos son iguales, los segundos habrán de ser también iguales entre si.

II. $\alpha\not\equiv\beta$. El razonamiento es análogo; por hipótesis de inducción $(\mu_{1\alpha/\tau})/v=(\mu_1)/v'$. La única diferencia entre $(\Lambda\beta\mu_1)_{\alpha/\tau}/v$ y $\Lambda\beta(\mu_{1\alpha/\tau})/v$ es que las apariciones libres no directas de $\beta$ en $\mu_1$ no son sustituídas por $v(\beta)$ en el primer término (naturalmente $\tau$ no pude contener a $\beta$ libre y no directa, pues de lo contrario no estaría libre para sustituir a $\alpha$). La misma diferencia se presenta entre $(\Lambda\beta\mu_1)/v'$ y $\Lambda\beta(\mu_1)/v'$, puesto que los primeros términos son iguales, los segundos habrán de ser también iguales entre si.

Ello finaliza la demostración del lema 3.3.4.

3.3.5. Lema.

Sea $\tau$ un término gramatical libre para $\alpha$ en $\xi(\alpha)$ y sean v y v' dos valoraciones $\alpha$-equivalentes tales que $v'(\alpha)=\tau/v$; entonces v' satisface $\xi(\alpha)$ ssi v satisface $\xi(\tau)$.

La demostración es por inducción sobre el número de conectivas y/o cuantificadores externos de la expresión.

Paso base:

Sea $\xi(\alpha)$ una expresión atómica

$F_r{}^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\tau_1,\ldots,\tau_q)$

v' satisfará ssi se verifica:

$\bar{F}_r{}^{p,q}[v'(t_1),\ldots,v'(t_p);\tau_1/v',\ldots,\tau_q/v']$

Por otra parte $\xi(\tau)$ es:

$F_r{}^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\tau_{1\alpha/\tau},\ldots,\tau_{q\alpha/\tau})$

y satisfará esta expresión ssi se verifica:

$\bar{F}_r{}^{p,q}(v(t_1),\ldots,v(t_p);\tau_{1\alpha/\tau}/v,\ldots,\tau_{q\alpha/\tau}/v)$

Naturalmente $v(t_i)=v'(t_i)$, pues v y v' son $\alpha$-equivalentes; además por el lema anterior también se verifica que $\tau$ $\tau_{i\alpha/\tau}/v=\tau_i/v'$, luego v' satisfará $\xi(\alpha)$ ssi v satisface $\xi(\tau)$.

Paso de inducción:

Supuesto que se verifica el lema para expresiones con menos de n conectivas y/o cuantificadores, es inmediato demostrar que se verifica el lema en los casos en los que $\xi(\alpha)$ es de la forma $\neg\xi_1(\alpha)$, $\xi_1(\alpha)\rightarrow\xi_2(\alpha)$ y $\wedge x\xi_1(\alpha)$.

Veamos el caso $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$. Entonces hay dos posibilidades en las cuales no se verificaría el lema:

I. Que v' satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y que v no satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$, o bien:

II. Que v' no satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\alpha)$ y que v satisfaciese $\Lambda\beta\xi_1(\tau)$.

Supongamos que se diese I en tal caso existiría una valoración w $\beta$-equivalente a v que no satisfaría $\xi_1(\tau)$. Sea w' la valoración $\beta$-equivalente a v' tal que $w'(\beta)=w(\beta)$. w y w' son $\beta$-equivalentes; además $w'(\alpha)=v'(\alpha)=\tau/v=\tau/w$, ya que v y w son $\beta$-equivalentes y $\tau$ no puede contener a $\beta$ libre (no estaría libre para sustituir a $\alpha$); luego w y w' son dos valoraciones $\alpha$-equivalentes, tales que $w'(\alpha)=\tau/w$ y una debería satisfacer $\xi_1(\alpha)$ ssi la otra satisface $\xi_1(\tau)$, contrariamente a lo que se ha dicho antes; así pues, no es posible que I se dé.

Analogamente se demuestra que II no se puede dar.

Ello demuestra el lema.

3.3.6. Lema.

Si dos valoraciones v y v' atribuyen a todas las variables libres en $\xi$ los mismos valores, entonces una satisface $\xi$ ssi la otra también lo hace.

Paso base: expresiones atómicas.

$F_r^{p,q}(t_1,\ldots,t_p;\tau_1,\ldots,\tau_q)$

ssi se verifica:

$\bar{f}_n^m[v(t_1),\ldots,v(t_p);\tau_1/v,\ldots,\tau_q/v]$

mientras que v' lo hará ssi se verifica

$\bar{f}_n^m[v'(t_1),\ldots,v'(t_p);\tau_1/v',\ldots,\tau_q/v']$

Pero $v(t_i)=v'(t_i)$ (de hecho es el lema 1.3.15. en lo que se refiere a términos individuales).

Por otra parte $\tau_i/v'=\tau_i/v$, ya que asignarán los mismos valores a las variables libres.

Paso de inducción:

Los casos $\neg\xi_1$ y $\xi_1\rightarrow\xi_2$ son inmediatos. Los casos $\Lambda x\xi_1$ y $\Lambda\alpha\xi_1$ también se resuelven fácilmente de la siguiente manera:

Si por ejemplo una de ellas (v) satisfaciese $\Lambda x\xi_1$ y la otra (v') no lo hiciese, entonces ello significaría que habría una w' x-equivalente a v' que no satisfaría $\xi_1$. Cojamos w x-equivalente $\xi_1$ tal que $w(x)=w'(x)$ entonces w debe satisfacer $\xi_1$ por ser x-equivalente a v; pero w y w' asignarán a todas las variables libres en $\xi_1$ los mismos valores y una satisfará $\xi_1$ ssi la otra también (por hipótesis de inducción) contrariamente a lo dicho antes.

Los demás casos se resuelven de forma análoga.

# BIBLIOGRAFIA

[Beal-79]: Bealer G., "Theories of properties, relations and propositions". The Journal of philosophy. 1979. pp. 635-648.

[Beal-83]: Bealer G., "Completeness in the theory of properties relations and propositions". Journal of symbolic logic. Vol. 48, No. 2, 1983. pp. 415-426.

[Benci 83]: Bencivega E., "Compactness of a super-evaluational language". Journal of symbolic logic. Vol. 48, No. 2, 1983. pp. 384-386.

[Boolos 74]: Boolos G. y Jeffrey J., "Computability and Logic". Cambridge University Press. 1974.

[Bossu 85]: Bossu G. y Segal P., "Saturación, Nonmonotonic reasoning and the closed-world assumption". Artificial Intelligence. Vol. 25. 1985. pp. 13-63.

[Bow 82]: Bowen K. A. y Kowalski R. A., "Amalgamating Language and meta-lenguage in Logic programming". En [Clark 82]. pp. 153-172. 1982.

[Brod 84]: Brodie M. L., Mylopoulos J. y Schmidt J. W., "On conceptual modelling". Springer-Verlag. 1984.

[Bundy 83]: Bundy A., "The computer modelling of mathematical reasoning". Academic Press. 1983.

[Burge 79]: Burge T., "Semantical Paradox". The Journal of philosophy. Vol. 76. 1979. pp. 169-198.

[Clark 82]: Clark K. L. y Tärlund S. A., "Logic programming". Academic Press.

[Cotag 81]: Cotagno P. G., "A logical argument about Artificial Intelligence & Technology". Vol. 4. 1981. pp. 525-537.

[Cherni 80]: Cherniavsky V. S., "On limitations of artificial Intelligence". Inform. Systems. Vol. 5. 1980. pp. 121-126.

[Church 84]: Church A., "Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski". En [Martin 84]. 1984. pp. 298-306.

[Davis 80a]: Davis R., "Meta-rules: reasoning about control". Artificial Intelligence. Vol. 15. 1980. pp. 179-222.

[Davis 80b]: Davis R., "Content reference reasoning about rules". Artificial Intelligence. Vol. 15. 1980. pp. 223-239.

[Doyle 79]: Doyle J., "A truth maintenance system". Artificial Intelligence. Vol. 12. 1979. pp. 231-272.

[Doyle 80]: Doyle J., "A model for deliberation, action and introspection". Artificial Intelligence Laboratory. Cambridge, Massachusets. TR-581. 1980.

[Far 85]: Fariñas del Cerro L., "Molog". Comunicación personal no publicada.

[Fefer 84]: Feferman S., "Towards useful type-free theorems I". Journal of symbolic logic. Vol. 49, No. 1, 1984. pp. 75-111.

[Fraas 66a]: Fraassen B. C. Van, "Singular terms, truth value gaps and free logic". The Journal of philosophy. Vol. XIII, No. 17. 1966. pp. 481-495.

[Fraas 66b]: Fraassen B. C. Van, "The completeness of free logic". Zeitschrift füa mathematische logik und Grundlagen der Mathematik. Vol. 12. 1966. pp. 219-334.

[Fraas 68a]: Fraassen B. C. Van, "Presupposition, implication and self-reference". Journal of philosophy. Vol. 56. 1968. pp. 136-152.

[Fraas 68b]: Fraassen B. C. Van, "A topological proof of the Löwenheim-Skolem, Compactness and strong completeness theorems for free logic". Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Vol. 14. 1968. pp. 245-254.

[Fraas 70]: Fraassen B. C. Van, "Truth and paradoxical consequences". En [Martin 70], pp. 13-23. 1970.

[Gupta 84]: Gupta A., "Truth and paradox". En [Martin 84], pp. 175-235. 1984.

[Haack 82]: Haack S., "Filosofia de las lógicas". Cátedra. 1982.

[Hayes 77]: Hayes P. J., "In defence of Logic". Proc 5th. IJCAI. Cambridge Massachusetts. pp. 559-565. August 1977.

[Herz 70]: Herzberger H. G., "Paradoxes of grounding in semantics". The Journal of philosophy. Vol. 17. 1970. pp. 145-167.

[Herz 84]: Herzberger H. G., "Notes on naive semantics". En [Martin 84], pp. 133-174. 1984.

[Israel 84]: Israel D. J. y Brachiman R. J., "Some remarks on the semantics of representation languages". En [Brod 84], pp. 119-142.

[Kleene 52]: Kleene S. C., "Introduction to meta-mathematics". North-Holland. 1952. (Trad. Esp., "Introducción a la meta-matematica". Tecnos 1974).

[Kleene 69]: Kleene S. C., Mathematical Logic. J. Wiley & Sons. 1969.

[Konol 85]: Konolidge K., Adeduction Model of Belief and its Logics. PhD. Thesis, Standford University; Computer Science Dept.

[Kripke 75]: Kripke S., "Outline of a theory of truth". The Journal of philosophy. Vol. 72, 1975. pp. 690-716.

[Lev 84a]: Levesque H. J., "The logic of inclomplete knowledge bases". En [Brod 84]. pp. 165-186. 1984.

[Lev 84b]: Levesque H. J., "Foundations of a functional approach to knowledge representation". Artificial Intelligence. Vol. 23. 1984. pp. 155-212.

[Martin 70]: Martin R. L., The paradox of the liar". Yale University Press. 1970.

[Martin 84a]:Martin R. L., "Recent essays on truth and the liar paradox". Oxford University Press.

[Martin 84b]:Martin R. L. y Woodruff, "On representing "True-in-L" in L". En [Martin 84], pp. 47-51. 1984.

[McCart 69]: Mc Carthy J. y Hayes P. J., "Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence". Machine Intelligence. Vol. 4, pp. 463-502. 1969. Ed. Meltzer B. y Michie D. Edimburgh University Press.

[McCart 77]: Mc Carthy J., "Epistemological problems of artificial intelligence". Proc. 5th. IJCAI 1977. pp. 1038-1044.

[McCart 79]: Mc Carthy J., "First order theories of individual concepts and propositions". En Expert Systems in the micro-electronic age. Proc. AISB summer School. Edimburgh, Scotland. Juli 1979. pp. 271-287.

[McCart 80]: Mc Carthy J., "Circunscription: a form of non-monotonic logic". Artificial Intelligence. Vol. 13. 1980. pp. 27-39.

[McDerm 80]: Mc Dermott P. y Doyle J., "Non monotonic logic I". Artificial Intelligence. Vol. 13.

1980. pp. 41-72.

[Moore 82]: Moore R. C., "The role of logic in knowledge representation and common sense reasoning". Proc AAAI National Conference 1982. pp. 428-433.

[Moore 85]: Moore 85, "Semantical considerations on non-monotonic logic". Artificial Intelligence. Vol. 25. 1985. pp. 75-94.

[Mylos 84]: Mylopoulos J. y Levesque H. J., "An overview of knowledge representation". En [Brod 84]. 1984. pp. 3-17.

[Newell 82]: Newell A., "The knowledge Level". Artificial Intelligence. Vol. 18. 1982. pp. 87-127.

[Per 85]: Perlis D., "Languages with "self-reference I". Foundation". Artificial Intelligence. Vol. 25. 1985. pp. 301-322.

[Skyrms 70]: Skyrms B., "Notes on quantification and self-reference". En [Martin 70], pp. 67-74.

[Wavell 83]: Wavell B. B., "Wittgenstein's doctrine of use". Synthese. Vol. 56, No. 3. 1983. pp. 253-264.

[Weyh 80]: Weyhrauch R. W., "Prolegomena to a theory of mechanized formal reasoning". Artificial Intelligence. Vol. 13. 1980. pp. 133-170.

[Wino 80]: Winograd T., "Extended inference modes in reasoning by computer systems". Artificial

Intelligence. Vol. 13. 1980. pp. 5-26.

[Wit 53]: Wittgenstein L., "Philosophical Investigations". Basil Blackwell. 1953.

[Wood 84a]: Woodruff P. W., "On superevaluations in free logic". Journal of symbolic logic. Vol. 49. No. 3. 1984. pp. 943-950.